

Politechnika Poznańska
Wydział Inżynierii Mechanicznej
Instytut Mechaniki Stosowanej
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



Rozprawa doktorska

**Badania cienkościennych słupów
ceowych o niestandardowych
przekrojach poprzecznych**

mgr inż. Aleksandra Magdalena Pawlak

Promotor: dr hab. inż. Piotr Paczos, prof. PP
Promotor pomocniczy: dr Marcin Rodak

Poznań, 2023r.

Pragnę wyrazić moją wdzięczność promotorowi dr hab. inż. Piotrowi Paczosowi, prof. PP za opiekę, zaangażowanie, pomoc merytoryczną oraz za cierpliwość i życzliwość okazaną w trakcie mojej wyczerpanej pracy nad niniejszą rozprawą doktorską.

Serdecznie dziękuję za wsparcie merytoryczne, pomoc, bezcenne wskazówki oraz cierpliwość okazaną mi przez promotora pomocniczego dr Marcina Rodaka.

Niezastąpionemu zespołowi Zakładu Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji dziękuję za zrozumienie i wspieranie mnie w trudnych momentach.

W szczególności pragnę podziękować dr hab. inż. Pawłowi Jasionowi oraz dr inż. Krzysztofowi Sowińskiemu za możliwość konsultacji oraz bezcenne uwagi merytoryczne.

Szczególne podziękowania należą się również moim bliskim, którzy służyli mi wsparciem przez cały ten czas wyczerpanej pracy.

Spis treści

Streszczenie.....	5
Summary	7
Cel i zakres pracy	9
Symbole	10
1. Wstęp	13
1.1. Wytwarzanie konstrukcji cienkościennych.....	15
1.2. Zmodyfikowane kształty przekrojów poprzecznych.....	16
2. Opis badanych słupów ceowych	19
3. Rozwiązanie analityczne	22
3.1. Metody projektowania kształtowników cienkościennych.....	22
3.1.1. Metoda wytrzymałości bezpośredniej (ang. DMS) i metoda wytrzymałości ciągłej (ang. CMS).....	22
3.1.2. Uogólniona teoria wytrzymałości (ang. GBT).....	24
3.1.3. Metoda szerokości efektywnej (ang. EWM).....	25
3.1.4. Zasada stacjonarności energii potencjalnej	26
3.2. Normy stosowane przy projektowaniu konstrukcji cienkościennych	27
3.2.1. Eurokod 3.....	27
3.2.2. ANSI/AISC 360-16 Specyfikacja konstrukcji stalowych (ang. <i>Specification for Structural Steel Buildings</i>).....	29
3.2.3. AS 4100-1998 Konstrukcje stalowe (ang. <i>Steel structures</i>)	30
3.3. Właściwości geometryczne przekrojów poprzecznych słupów	31
3.4. Wyprowadzenie równań równowagi drugiego rzędu.....	36
3.4.1. Wyboczenie/stateczność ogólna.....	43
3.4.2. Wyboczenie/stateczność dystorsyjna	44
3.4.3. Wyboczenie/stateczność miejscowa	46
3.4.3.1. Wyboczenie ścianek.....	46
3.4.3.2. Wyboczenie ścianek przęsłowych.....	47
3.4.3.3. Wyboczenie ścianek wspornikowych (zagięcie brzegowe).....	47
3.5. Rozwiązanie analityczne - uzyskane wyniki.....	48
4. Badania doświadczalne	51
4.1. Metodyka, zastosowana aparatura.....	51
4.2. Przedmiot badań doświadczalnych	53
4.3. Metoda tensometryczna	57
4.3.1. Wyniki badań tensometrycznych	60

4.3.1.1.	Siła maksymalna.....	61
4.3.1.2.	Siła krytyczna	63
	Metoda stycznej.....	65
	Metoda Kotier'a ($P - \omega$)	66
4.4.	Metody optyczne	68
4.4.1.	Wyniki badań optycznych	69
4.4.1.1.	Postacie wyboczenia słupów	71
4.4.1.2.	Siły maksymalne i wyboczeniowe	77
5.	Badania numeryczne	77
5.1.	Metoda elementów skończonych	78
5.1.1.	Model numeryczny słupa	80
5.1.2.	Liniowa analiza wyboczenia słupów i uzyskane wyniki	83
5.1.3.	Nieliniowa analiza wyboczenia słupów i uzyskane wyniki	86
5.2.	Metoda pasm skończonych	91
5.2.1.	Model numeryczny słupa	92
5.2.2.	Analiza utraty stateczności słupów i uzyskane wyniki	94
6.	Omówienie uzyskanych wyników.....	101
6.1.	Siła krytyczna	102
6.2.	Postacie utraty stateczności	104
6.3.	Nośność	105
6.4.	Porównanie uzyskanych wyników badań.....	109
7.	Wnioski	111
8.	Kierunki dalszych badań	113
	Bibliografia.....	114

Streszczenie

Konstrukcje cienkościenne zyskują coraz większą popularność wśród projektantów i konstruktorów ze względu na ich wysoką wytrzymałość i przy jednocześnie niskiej masie. Ustroje cienkościenne znajdują zastosowanie w wielu gałęziach przemysłu m.in. w budownictwie lądowym, przemyśle samochodowym, budowie maszyn czy lotnictwie.

Niniejsza praca poświęcono jest badaniu wytrzymałości oraz odporność na utratę stateczności cienkościennych słupów ceowych o niestandardowym kształcie przekroju poprzecznego. Do badań i analiz zastosowano metody doświadczalne i numeryczne. Ponadto przedstawiono rozwiązanie analityczne opierające się na procedurach zawartych w normie EUROKOD 3 i na zasadzie minimalnej całkowitej energii potencjalnej. Rozprawa doktorska składa się z ośmiu rozdziałów.

Celem niniejszej rozprawy doktorskiej to:

- analiza wytrzymałości cienkościennych słupów ceowych o niestandardowych kształtach przekroi poprzecznych,
- wyznaczenie sił maksymalnych przy których doszło do zniszczenia słupów,
- analiza wyboczenia ogólnego, miejscowego i dystorsyjnego oraz wyznaczenie sił krytycznych i odpowiadającym im postaci wyboczenia,
- porównanie wyników otrzymanych trzema metodami: analityczną, numeryczną (FSM, MES) oraz doświadczalną,
- zestawienie wyników w postaci tabel i wykresów.

W niniejszej rozprawie doktorskiej przedstawiono najważniejsze osiągnięcia w zakresie wytrzymałości i stateczności konstrukcji cienkościennych. Na podstawie wykonanego przeglądu literaturowego stwierdzono, że w ostatnich latach, wśród naukowców wzrosło zainteresowanie konstrukcjami cienkościennymi. Artykuły naukowe i monografie cytowane w niniejszej pracy odnoszą się do badań stateczności i wytrzymałości konstrukcji cienkościennych. Przedmiotem badań w tych pracach są kształtowniki o klasycznych, niezbyt skomplikowanych kształtach przekroi poprzecznych. W niniejszej rozprawie doktorskiej zajęto się analizą i badaniem słupów posiadających zmodyfikowane kształty przekroi poprzecznych. To innowacyjne podejście do kształtów przekroi poprzecznych pozwoliło określić wpływ modyfikacji tego kształtu na wytrzymałość, stateczność oraz nośność graniczną ściskanych słupów ceowych.

W rozdziale drugim dokonano opisu badanych słupów ceowych uwzględniając kształty i wymiary ich przekroi poprzecznych. Słupy wykonane zostały w technologii formowania na zimno

z jednego arkusza blachy. Ponadto wykonano statyczną próbę rozciągania, która umożliwiła wyznaczenie właściwości mechanicznych blachy, z której wykonane zostały słupy.

W kolejnych rozdziałach opisano rozwiązanie analityczne, które oparte było na procedurach zawartych w normie EUROKOD 3 oraz zasadzie minimalnej całkowitej energii potencjalnej. Następnie opisano badania doświadczalne, które wykonano z zastosowaniem metody tensometrycznej oraz metody optycznej. Na końcu opisano badania numeryczne przeprowadzone przy pomocy metody elementów skończonych oraz metody pasm skończonych.

Na podstawie przeprowadzonych badań określono wartości sił krytycznych, sił maksymalnych, przy których słupy uległy zniszczeniu. Ponadto na podstawie metody optycznej zidentyfikowano postacie utraty stateczności słupów.

Praca jest zakończona dyskusją wyników oraz wnioskami, które wysunięto na podstawie przeprowadzonych badań i rezultatów tych badań. Stwierdzono, że niestandardowe kształty przekroi poprzecznych ściskanych słupów są znacznie sztywniejsze niż te klasyczne przekroje np. „*lipped channel*”. Modyfikacje kształtu przekroi poprzecznych powodują wzrost wartości sił krytycznych i sił maksymalnych. Ponadto w przypadku słupów posiadających podwójny arkusz blachy na półce, gdzie arkusz wewnętrzny ukształtowany jest w „skrzynki” lub trapezy, dochodzi do miejscowej utraty stateczności. W przypadku tego rodzaju kształtowników nie stwierdzono występowania interakcji pomiędzy postaciami wyboczenia.

Wykonane analizy mogą przyczynić się do popularyzacji i komercjalizacji niestandardowych kształtów przekrojów przyrzecznych cienkościennych słupów ceowych. Zrealizowane badania i analizy wniosły istotny wkład w rozwój teorii stateczności cienkościennych słupów.

Summary

Thin-walled structures are gaining more and more popularity among designers and constructors due to their high strength and at the same time low weight of the whole structure. Thin-walled structures are used in many industries including civil engineering, automotive, mechanical engineering and aviation.

The present work is devoted to the investigation of the strength and resistance to loss of stability of thin-walled channel columns with non-standard cross-sectional shape. Experimental and numerical methods were used for testing and analysis. In addition, an analytical solution based on the procedures contained in EUROKOD 3 and on the principle of minimum total potential energy is presented. The dissertation consists of eight chapters.

The purpose of this dissertation was:

- to analyse the strength of thin-walled channel columns with non-standard cross-sectional shapes,
- determination of the maximum forces at which the columns failed,
- analysis of general buckling, local buckling and distortional buckling, and determination of critical forces and corresponding forms of buckling,
- comparison of results obtained by three methods: analytical, numerical (FSM, FEM) and experimental (strain gauge and optical),
- compilation of results in the form of tables and graphs.

This dissertation presents the most important developments in the strength and stability of thin-walled structures. Based on the literature review performed, it was found that in recent years, interest in thin-walled structures has increased among researchers. The scientific articles and monographs cited in this dissertation relate to the study of stability and strength of thin-walled structures. The subjects of research in these works are sections with classical cross-sectional shapes that are not too complicated. The present work deals with the analysis and study of columns having modified cross-section shapes. This innovative approach to cross-section shapes made it possible to determine the effect of modification of this shape on the strength, stability and ultimate capacity of compression channel columns.

The second chapter describes the channel columns studied, taking into account the shapes and dimensions of their cross sections. The columns were made by cold-forming technology from a single sheet of steel. In addition, a static tensile test was performed to determine the mechanical properties of the sheet from which the columns were made.

The following sections describe the analytical solution, which was based on the procedures contained in EUROKOD 3 and the principle of minimum total potential energy. This is followed by a description of the experimental tests, which were performed using the strain gauge method and the optical method. Finally, numerical studies performed using the finite element method and the finite strip method are described.

On the basis of the tests carried out, the values of critical forces, the maximum forces at which the columns failed, were determined. In addition, based on the optical method, the forms of loss of stability of columns were identified.

The paper is concluded with a discussion of the results and conclusions made on the basis of the research conducted and the findings of this study. It was found that non-standard shapes of cross-sections of compressed columns are much stiffer than those classical cross-sections, e.g. "lipped channel". Modifications of the shape of cross sections result in an increase in the values of critical forces and maximum forces. In addition, for columns having a double sheet on the flange, where the inner sheet is shaped into "boxes" or trapezoids, there is a local loss of stability. For these sections, no interaction between buckling forms was found.

The performed analyses can contribute to the popularization and commercialization of non-standard cross-sectional shapes of thin-walled channel columns. The realized research and analysis made a significant contribution to the development of the theory of stability of thin-walled columns.

Cel i zakres pracy

Celem niniejszej rozprawy doktorskiej jest zbadanie wpływu modyfikacji kształtu przekrojów poprzecznych ściskanych słupów ceowych na ich wytrzymałość, stateczność oraz nośność graniczną. Ponadto celem pracy było opracowanie efektywnych rozwiązań zagadnień związanych ze statecznością cienkościennych słupów ceowych, które umożliwiają parametryczną analizę kształtów przekroi poprzecznych słupów oraz weryfikację tych rozwiązań. Zmiana kształtu przekroju poprzecznego badanych słupów ma na celu podwyższenie wartości siły krytycznej do wartości siły maksymalnej, przy której doszło do zniszczenia słupów.

Cele szczegółowe można opisać następująco:

- wyznaczenie wartości sił krytycznych,
- wyznaczenie wartości sił wyboczeniowych, przy których pojawiają się pierwsze oznaki wyboczenia słupów,
- wyznaczenie wartości sił maksymalnych, przy których dochodzi do zniszczenia słupów,
- określenie postaci wyboczenia słupów oraz interakcji pomiędzy tymi postaciami.

Na podstawie przeprowadzonych badań stwierdzić będzie można w jaki sposób modyfikacje przekroi poprzecznych wpływają na wartości sił krytycznych, wyboczeniowych czy maksymalnych. Ponadto określone zostaną charakterystyczne postacie wyboczenia dla zastosowanych modyfikacji kształtu.

W tym miejscu warto zaznaczyć, że nośność graniczna w przypadku analizy ustrojów cienkościennych jest złożonym zagadnieniem. Istotna jest nie tylko wartość siły maksymalnej, przy której dochodzi do zniszczenia słupa, ale również wartość siły krytycznej i odpowiadająca jej postać wyboczenia.

Plan badań obejmował:

- rozwiązanie analityczne oparte na procedurach obliczeniowych zawartych w normie EUROKOD 3 oraz zasadzie minimalnej całkowitej energii potencjalnej,
- badania doświadczalne wykonane metodą tensometryczną oraz metodą optyczną,
- badania numeryczne wykonane metodą elementów skończonych oraz metodą pasm skończonych.

Ponadto wyznaczone zostały charakterystyki geometryczne przekroi poprzecznych analizowanych słupów. Określone zostały położenia środków ciężkości przekroi poprzecznych, co umożliwiło określenie punktów lub osi, względem których przykładana była siła ściskająca. Dzięki temu uzyskano warunki czystego ściskania.

Symbole

Wymiary przekroju poprzecznego słupa:

- a – połowa wysokości środnika mierzona względem linii środkowej [mm]
- b – wysokość środnika słupa [mm]
- c – wymiar zagięcia na półce [mm]
- c_1 – wymiar zagięcia na środniku [mm]
- c_2 – wymiar zagięcia na środniku [mm]
- d – długość zagięcia brzegowego [mm]
- e – wymiar zagięcia na półce [mm]
- e_1 – wymiar zagięcia na półce [mm]
- f – wymiar zagięcia na półce [mm]
- g – wymiar zagięcia na półce [mm]
- H – szerokość półki środnika [mm]
- k – wymiar zagięcia na środniku [mm]
- m – wymiar zagięcia na półce [mm]
- n – wymiar zagięcia na półce [mm]
- s – wysokość zagięcia na półce [mm]
- t – grubość blachy, z której wykonano słupy [mm]
- w – szerokość półki mierzona względem linii środkowej [mm]

Charakterystyki geometryczne przekroi poprzecznych – układy współrzędnych:

- (y', z') – pierwotny układ współrzędnych
- (y, z) – centralny układ współrzędnych z początkiem w środku ciężkości przekroju poprzecznego słupa

Charakterystyki geometryczne przekroi poprzecznych – właściwości:

- A – pole przekroju poprzecznego słupa [mm²]
- I_p – biegunowy moment bezwładności [mm⁴]
- I_s – moment bezwładności przy skręcaniu [mm⁴]
- $I_{y'}, I_{z'}$ – momenty bezwładności względem pierwotnego układu współrzędnych [mm⁴]
- I_y, I_z – momenty bezwładności względem centralnego układu współrzędnych [mm⁴]
- $I_{y'z'}$ – odśrodkowy moment bezwładności względem pierwotnego układu współrzędnych [mm⁴]
- I_{yz} – odśrodkowy moment bezwładności względem centralnego układu współrzędnych [mm⁴]

$I_{y'\omega_0^*}, I_{z'\omega_0^*}$ - wycinkowe, odśrodkowe momenty bezwładności względem osi pierwotnych [mm⁴]
 $I_{y\omega_0^*}, I_{z\omega_0^*}$ - wycinkowe, odśrodkowe momenty bezwładności względem osi centralnych [mm⁴]
 I_ω - wycinkowy, odśrodkowy momenty bezwładności [mm⁴]
 $I_{\omega_0^*}$ - wycinkowy moment bezwładności względem układu centralnego [mm⁴]
 I_ξ, I_η - ekstremalne momenty bezwładności [mm⁴]
 $S_{y'}, S_{z'}$ - momenty statyczne względem pierwotnego układu współrzędnych [mm³]
 $S_{\omega_0^*}$ - wycinkowy, statyczny moment bezwładności [mm³]
 (y'_C, z'_C) - położenie środka ciężkości przekroju poprzecznego słupa
 (y_S, z_S) - położenie środka ścinania (bieguna głównego)
 (y'_S, z'_S) - współrzędne środka ścinania (bieguna głównego) względem środka ciężkości
 W_t - wskaźnik wytrzymałości przy skręcaniu [mm³]
 W_ω - wycinkowy wskaźnik wytrzymałości [mm³]
 α - położenie głównych osi bezwładności [°]
 ω - współrzędna wycinkowa [mm]

Oznaczenia zastosowane w rozwiązaniu analitycznym:

\hat{A} - pole przekroju poprzecznego półki [mm²]
 E - moduł Younga [MPa]
 k_y, k_z, k_ψ - współczynniki sztywności z uwagi na przemieszczenia w kierunku osi y i z oraz obrotu względem osi x [/]
 r_s - biegunowy promień bezwładności względem środka ścinania [mm]
 L - długość słupa [mm]
 N - uogólniona siła przekrojowa, siła wewnętrzna [N]
 P - siła wzdłużna, skupiona, ściskająca obciążająca słup [N]
 q_x - intensywność obciążenia wzdłużnego $\left[\frac{N}{mm} \right]$
 $U(x, y, z)$ - przemieszczenie dowolnego punktu w kartezjańskim układzie współrzędnych [mm]
 U_ε - energia odkształcenia sprężystego [J]
 $U_{\varepsilon l}$ - część liniowa energii odkształcenia sprężystego [J]
 $U_{\varepsilon n}$ - część nieliniowa energii odkształcenia sprężystego [J]
 $v(x)$ - przemieszczenie bieguna głównego (środka ścinania) S względem osi y [mm]
 $V_s(x, s)$ - przemieszczenie dowolnego punktu leżącego na powierzchni środkowej słupa w kierunku stycznym [mm]

W – praca obciążenia [J]

$w(x)$ – przemieszczenie bieguna głównego (środka ścinania) S względem osi z [mm]

$W_s(x, s)$ – przemieszczenie dowolnego punktu leżącego na powierzchni środkowej słupa w kierunku prostopadłym [mm]

$y(s), z(s)$ – współrzędne dowolnego punktu w przekroju poprzecznym słupa [mm]

γ – odkształcenie postaciowe [/]

ε – odkształcenie obwodowe [/]

ε_{xl} – odkształcenie obwodowe liniowe [/]

ε_{xn} – odkształcenie obwodowe nieliniowej [/]

λ – smukłość [/]

μ - współczynnik Poissona [/]

σ_{xl} – naprężenia normalne w zakresie liniowym [MPa]

$\psi(x)$ – kąt obrotu przekroju poprzecznego belki względem osi x [°]

Pozostałe oznaczenia:

F_{kr} – siła krytyczna [N]

F_{max} – siła maksymalna przy której doszło do zniszczenia słupa [N]

F_w – siła wyboczeniowa [N]

G – moduł Kirchhoffa [MPa]

K – moduł Helmholtza [MPa]

R_{eH} – górna granica plastyczności [MPa]

R_m – wytrzymałość na rozciąganie [MPa]

ν – współczynnik Poissona [/]

1. Wstęp

Cienkościenne konstrukcje są coraz bardziej popularne wśród inżynierów i konstruktorów ze względu na ich wiele zalet. Przede wszystkim, konstrukcje te charakteryzują się niskim ciężarem i materiałochłonnością, co pozwala na osiągnięcie znacznych oszczędności w kosztach produkcji. Dodatkowo, dzięki wysokiej nośności i wytrzymałości, cienkościenne konstrukcje pozwalają na przenoszenie coraz większych obciążeń przy zachowaniu niskiej masy. Prosta technologia produkcji oraz łatwość montażu to kolejne zalety tych konstrukcji. Proces produkcji polega na wykonywaniu gięcia arkusza blachy stalowej na maszynach ręcznych lub sterowanych numerycznie. Dzięki temu proces ten jest stosunkowo prosty i nie wymaga skomplikowanych narzędzi czy maszyn. Cienkościenne konstrukcje znajdują zastosowanie w wielu gałęziach przemysłu, w tym w przemyśle motoryzacyjnym, gdzie są wykorzystywane jako elementy karoserii. Ponadto, są stosowane w przemyśle lotniczym, stoczniowym, kolejowym czy budowlanym, np. jako konstrukcje dachów i elementów nośnych hal. Ich popularność wynika z możliwości osiągnięcia wysokiej wytrzymałości przy jednoczesnym zachowaniu niskiej masy, co jest szczególnie ważne w przypadku transportu lotniczego czy kolejowego, gdzie każdy dodatkowy kilogram materiału wpływa na koszty produkcji i zużycie paliwa, ale również na zanieczyszczenie środowiska.

Przekroje konstrukcji prętowych dzieli się na cienkościenne i krępe w zależności od stosunku wymiarów przekroju poprzecznego do grubości blachy. Przekroje krępe charakteryzują się dużym stosunkiem sztywności do masy oraz niewrażliwością na miejscową utratę stateczności, co pozwala na projektowanie ich w stanie sprężystym lub plastycznym. Przekroje cienkościenne, z kolei, mają stosunkowo mały moment bezwładności, co sprawia, że są one wrażliwe na utratę stateczności zarówno ogólną jak i miejscową. W wyniku utraty stateczności może dojść do zniszczenia konstrukcji, dlatego przekroje te należy analizować w stanie przedwyboczeniowym jak i powyboczeniowym. Wybór odpowiedniego przekroju elementu danej konstrukcji zależy od wielu czynników, takich jak rodzaj obciążenia, warunki brzegowe czy wymagania dotyczące masy i sztywności. W przypadku cienkościennych konstrukcji prętowych należy zwrócić szczególną uwagę na analizę krytyczną, aby unikać pojawienia się nagłej utraty stateczności i zapewnić tym samym bezpieczeństwo konstrukcji.

Belki to elementy konstrukcyjne, które najczęściej są obciążone poprzecznie do swojej osi podłużnej. Analiza wytrzymałościowa belek opiera się głównie na zginaniu i skręcaniu, a także na działaniu sił rozciągających i ściskających. Zginanie belek może być jednokierunkowe lub dwukierunkowe. Zginanie jednokierunkowe występuje, gdy belka obciążona jest względem jednej z dwóch osi bezwładności przekroju, natomiast zginanie dwukierunkowe występuje, gdy belka

zginana jest względem obu osi bezwładności, co nazywamy również zginaniem ukośnym. W przypadku zginania jednokierunkowego momenty gnące w przekroju belki występują tylko w jednym kierunku, a w przypadku zginania dwukierunkowego momenty gnące występują w dwóch kierunkach. Natomiast skręcanie belki to zjawisko, które występuje, gdy wypadkowa sił poprzecznych działających na belkę przechodzi poza środkiem ścinania przekroju poprzecznego. Skręcanie to powoduje obrót przekroju belki wokół osi podłużnej oraz występowanie naprężeń stycznych. W analizie wytrzymałościowej belek należy uwzględnić wpływ obciążeń zewnętrznych, rodzaj materiału, geometrię przekroju a także siły osiowe, momenty gnące i siły poprzeczne. Dzięki temu możliwe jest zaprojektowanie belki o odpowiedniej sztywności oraz wytrzymałości, spełniającej wymagania dotyczące bezpieczeństwa.

Słupy są podstawowymi elementami konstrukcyjnymi w wielu gałęziach przemysłu, takich jak budownictwo, energetyka czy przemysł maszynowy. W zależności od warunków pracy, słupy mogą być wykonane z różnych materiałów, takich jak stal, aluminium, beton czy drewno. Analiza wytrzymałościowa słupów jest niezwykle ważna, gdyż w przypadku nieprawidłowego projektu lub wykonania, może dochodzić do ich uszkodzenia lub nawet zniszczenia. Z tego powodu, projektowanie i analiza wytrzymałościowa słupów wymaga dokładnej znajomości ich właściwości materiałowych, geometrii oraz warunków obciążenia. Jednym z parametrów charakteryzujących wytrzymałość słupów jest ich nośność, czyli określenie maksymalnej siły ściskającej, którą może przenieść dany słup bez uszkodzenia. Nośność słupów zależy od wielu czynników, takich jak geometria przekroju, całkowita długość, materiał z którego zostały wykonane oraz sposób podparcia i warunki obciążenia. W przypadku słupów, analizuje się przede wszystkim ich stateczność, czyli zdolność do zachowania równowagi pod wpływem działających sił ściskających. Utrata stateczności może wystąpić w przypadku niewłaściwego doboru materiału, nieodpowiedniej geometrii przekroju, niewłaściwego podparcia lub nieodpowiedniego sposobu obciążenia. Analiza wytrzymałościowa słupów jest niezwykle ważna dla zapewnienia bezpieczeństwa konstrukcji oraz optymalnego wykorzystania materiałów, z których ona powstaje. Wymaga ona dokładnej znajomości właściwości materiałowych, geometrycznych oraz warunków obciążenia, a także wiedzy na temat utraty stateczności i sposobów jej zapobiegania.

W niniejszej pracy rozważane będą słupy cienkościenne. Na całym świecie rośnie zainteresowanie analizą wytrzymałościową oraz badaniami utraty stateczności słupów, jednak jest to tematyka, którą zajmuje się ciągle niewielka ilość badaczy. Słupy są to konstrukcje nośne obciążane ściskającymi siłami podłużnymi, osiowo lub mimośrodowo, osiowo lub poprzecznie (giętnie) oraz osiowo giętnie i skrętnie [1].

Obecnie najczęściej stosowane są kształtowniki o klasycznych przekrojach poprzecznych, takie jak: teowniki, dwuteowniki, kątowniki, ceowniki czy zetowniki. Konstruowane są ustroje o różnych przekrojach poprzecznych: bisymetrycznych, monosymetrycznych lub niesymetrycznych, w tym otwartych lub zamkniętych, pełnościennych lub ażurowych i wielogałęziowych.

Podsumowując, konstrukcje cienkościenne zyskują coraz większą popularność wśród inżynierów i konstruktorów ze względu na ich wiele zalet, takich jak niski ciężar, wysoka nośność i wytrzymałość, prosta technologia produkcji oraz łatwość montażu. Znajdują one zastosowanie w wielu gałęziach przemysłu, co potwierdza ich skuteczność i przydatność w praktyce.

1.1. Wytwarzanie konstrukcji cienkościennych

W dzisiejszych czasach w związku z rosnącym zapotrzebowaniem na różnego rodzaju części maszyn czy elementy konstrukcji od producentów tych ustrojów wymaga się stosowania technik szybkiego, taniego oraz ekologicznego wytwarzania. Projektanci muszą być wyposażeni w odpowiednią wiedzę i narzędzia, aby skutecznie zaprojektować a następnie wytworzyć efektywne i trwałe konstrukcje cienkościenne, które będą spełniać wymagania użytkowe i estetyczne.

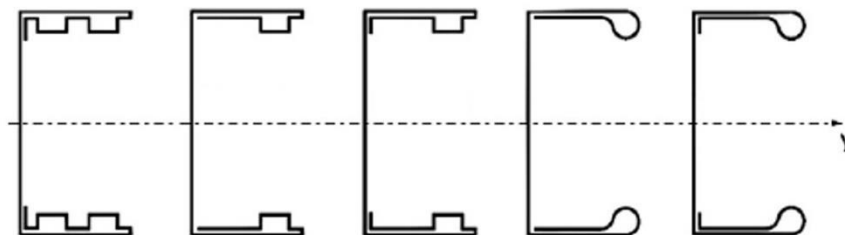
Wytwarzanie cienkościennych profili o niestandardowych, skomplikowanych kształtach przekrojów poprzecznych jest możliwe przy zastosowaniu obróbki plastycznej na zimno z wykorzystaniem maszyn sterowanych numerycznie CNC – giętarek. Stosowane są także giętarki ręczne lub półautomatyczne. Takie metody wytwarzania profili cienkościennych są precyzyjne, jednak wytwarzane ustroje nie są pozbawione imperfekcji, czyli niedokładności kształtu. Gięcie blachy na zimno to proces polegający na poddaniu materiału giętego procesom obróbki plastycznej przy zachowaniu stałej grubości materiału. Dokładność gięcia blachy na zimno zależy od wielu czynników, takich jak grubość, właściwości fizyczne i mechaniczne materiału, kształt przekroju poprzecznego oraz parametry procesu gięcia, takie jak siła, promień i kąt gięcia.

Technologia gięcia na zimno posiada wiele zalet, m.in. nie uszkadza powłok ochronnych naniesionych na blachę przed wykonaniem procesu gięcia, dzięki temu nie ma konieczności ponownego nanoszenia powłok po uformowaniu ustroju [2]. Formowanie na zimno to proces umożliwiający uzyskanie elementów o niestandardowych, skomplikowanych kształtach przekrojów poprzecznych oraz o dużych wymiarach i małych grubościach ścianek. Sabbagh i in. [3] zwracają uwagę na fakt, że formowane na zimno kształtowniki są łatwiejsze w produkcji oraz oferują większą różnorodność wytwarzanych profili. Ponadto Obst i in. [4] wykazali, że do wytworzenia belki potrzebna jest niewielka energia, a proces jest tani i szybki. Warto zauważyć, że koszt wytwarzania ustrojów cienkościennych jest uzależniony od poziomu skomplikowania kształtów

przekrojów poprzecznych belek i słupów. Im bardziej skomplikowany przekrój poprzeczny słupa tym koszt wytworzenia będzie wyższy. Belki powstające w technologii gięcia na zimno, ze względu na możliwość swobodnego kształtowania, dają konstruktorom dużą elastyczność w projektowaniu ich przekroju poprzecznego. Możliwość wytwarzania różnego rodzaju kształtów przekrojów poprzecznych to istotna zaleta technologii gięcia na zimno, ponieważ belki wytwarzane w technologii walcowania na gorąco dostępne są tylko w znormalizowanych kształtach. W pracy Huynh i in. [5] opisane zostały kształtowniki cienkościenne wykonane ze stopu aluminium. Profile aluminiowe zyskują swoją popularność ze względu na niską wagę, wysoką wytrzymałość, łatwość recyklingu i odporność na korozję. Do niedawna kształtowniki aluminiowe były wykonywane poprzez walcowanie na zimno z kręgów aluminiowych przy użyciu istniejących systemów do walcowania na zimno kształtowników stalowych. Podczas procesu walcowania na zimno, deformacje plastyczne w narożach powodują umocnienie materiału i związane z tym podwyższenie granicy plastyczności. Dodatkowo proces formowania na zimno może generować naprężenia resztkowe przekroju poprzecznego, które mogą wpływać bezpośrednio na zachowanie elementów konstrukcyjnych. W artykule opisano badania doświadczalne, których celem było określenie właściwości mechanicznych i naprężeń resztkowych w ceowych przekrojach poprzecznych profili aluminiowych wykonywanych w technologii gięcia na zimno. Uzyskane wyniki badań pozwoliły na identyfikację różnic pomiędzy kształtownikami aluminiowymi w odniesieniu do profili stalowych.

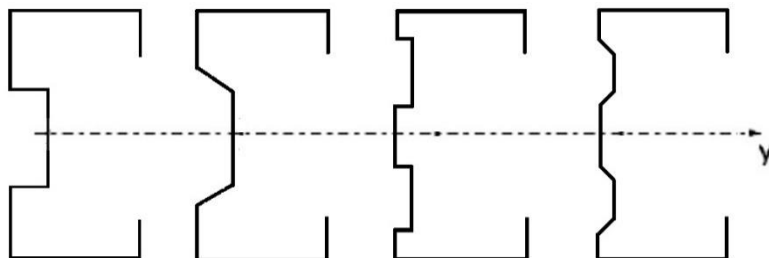
1.2. Zmodyfikowane kształty przekrojów poprzecznych

Na wytrzymałość i utratę stateczności konstrukcji cienkościennej duży wpływ ma kształt przekroju poprzecznego. Naukowcy analizują oraz badają coraz nowsze i ciekawsze kształty przekroi poprzecznych. Paczos [6] poddał badaniom doświadczalnym belki cienkościenne o zmodyfikowanych kształtach półek (pasów). Przeanalizował belki z podwójnie uformowaną blachą półek w kształty skrzynkowe i kropłowe, które przedstawione zostały na rysunku 1.1.



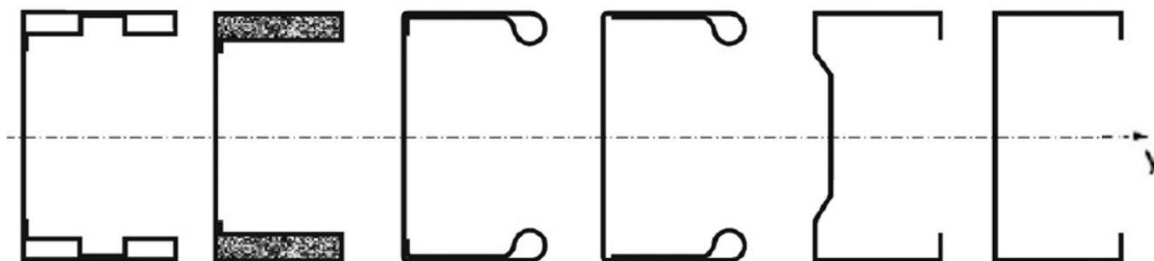
Rysunek 1.1. Kształtowniki ceowe ze skrzynkowym i kropłowym ukształtowaniem półki [6]

Modyfikacji podlegać może zarówno kształt półki jak i kształt środniczka. Huang i in. [7] zbadali klasyczne ceowniki z zagięciem brzegowym półek oraz czterema różnymi usztywnieniem środniczków (skrzynkowe i trapezowe), które przedstawione zostały na rysunku 1.2.



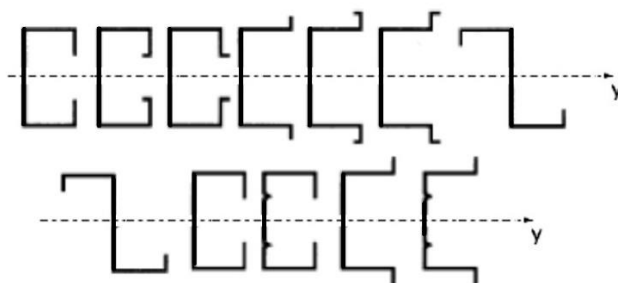
Rysunek 1.2. Kształtowniki ceowe o zmodyfikowanym kształcie środniczka [7]

Magnucka-Blandzi i Magnucki [8] w swoich badaniach uwzględnili modyfikacje przekroju poprzecznego w postaci różnego rodzaju zagięć. Ponadto przeanalizowali belkę posiadającą półkę wykonaną z płyty warstwowej (rys. 1.3.). Problemem stateczności ceownika z półką o właściwościach ortotropowych zajęli się Magnucka-Blandzi i Zajac [9]. Rozważyli dwa przypadki: belkę poddaną czystemu zginaniu oraz obciążoną siłą ściskającą.



Rysunek 1.3. Kształtowniki ceowe o kropłowym, skrzynkowym oraz sandwiczowym ukształtowaniu półki [8]

Profile z trzema różnymi wariantami kształtu kropłowej półki (*ang. drope flange*) w ceowniku przedstawili SudhirSastry i in. [10]. Yerudkar i Vesmawala [11] analizie poddali ceowniki i zetowniki o zmodyfikowanym kształcie półki i/lub środniczka. Badane przez tych naukowców przekroje przedstawiono na rysunku 1.4.



Rysunek 1.4. Ceowniki i zetowniki z zagięciami na półce lub na środniczku [11]

Dinis i in. [12] przeanalizowali wpływ różnego rodzaju zagięć brzegowych na wartości obciążeń przy których dochodzi do zniszczenia ustroju cienkościennego. Grenda i Paczos [13] zbadali dwa typy ceowników posiadających usztywnienia zarówno na półce jak i na środku, belki zostały poddane czteropunktowemu zginaniu.

Klasyczne ceowniki oraz przekroje z zagięciem brzegowym (*ang. lipped channel*) były przedmiotem badań w pracach: Kołakowskiego i Jankowskiego [14], Anbarasu i Sukumara [15], Kołakowskiego i Urbaniaka [16]. Standardowe kształty ceowych przekrojów poprzecznych belek i słupów analizowane i opisywane zostały w licznych monografiach oraz artykułach.

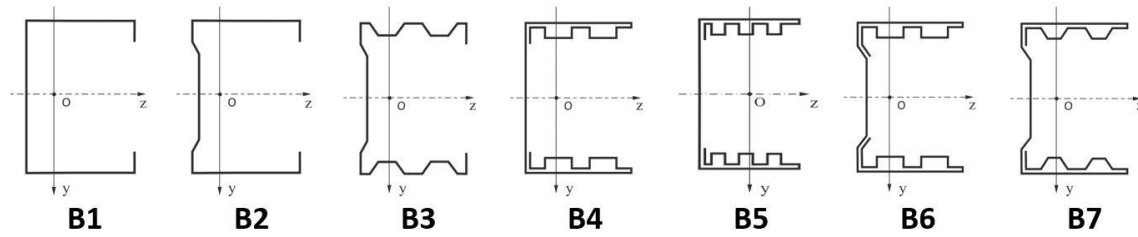
Badacze coraz częściej poddają analizie cienkościenne ustroje o niestandardowym kształcie przekroju poprzecznego. Jednakże, w głównej mierze, są to pojedyncze zagięcia na półce i/lub na środku. W niniejszej pracy przedmiotem badań są kształtowniki ceowe o pojedynczej lub podwójnej blasze, z modyfikacją kształtu półki i środnika. Tylko nieliczne prace opisują tak zmodyfikowane kształty przekroi poprzecznych, czego dowiódł przegląd literaturowy.

2. Opis badanych słupów ceowych

Przy projektowaniu współczesnych konstrukcji coraz częściej zastosowanie znajdują ustroje cienkościenne, które pozwalają na przenoszenie dużych obciążeń przy jednoczesnej redukcji masy. Przedmiotem badań w niniejszej pracy są formowane na zimno, cienkościenne słupy stalowe o zmodyfikowanym kształcie przekroju poprzecznego, które znajdują zastosowanie w licznych gałęziach przemysłu takich jak budownictwo, przemysł lotniczy, samochodowy oraz wiele innych.

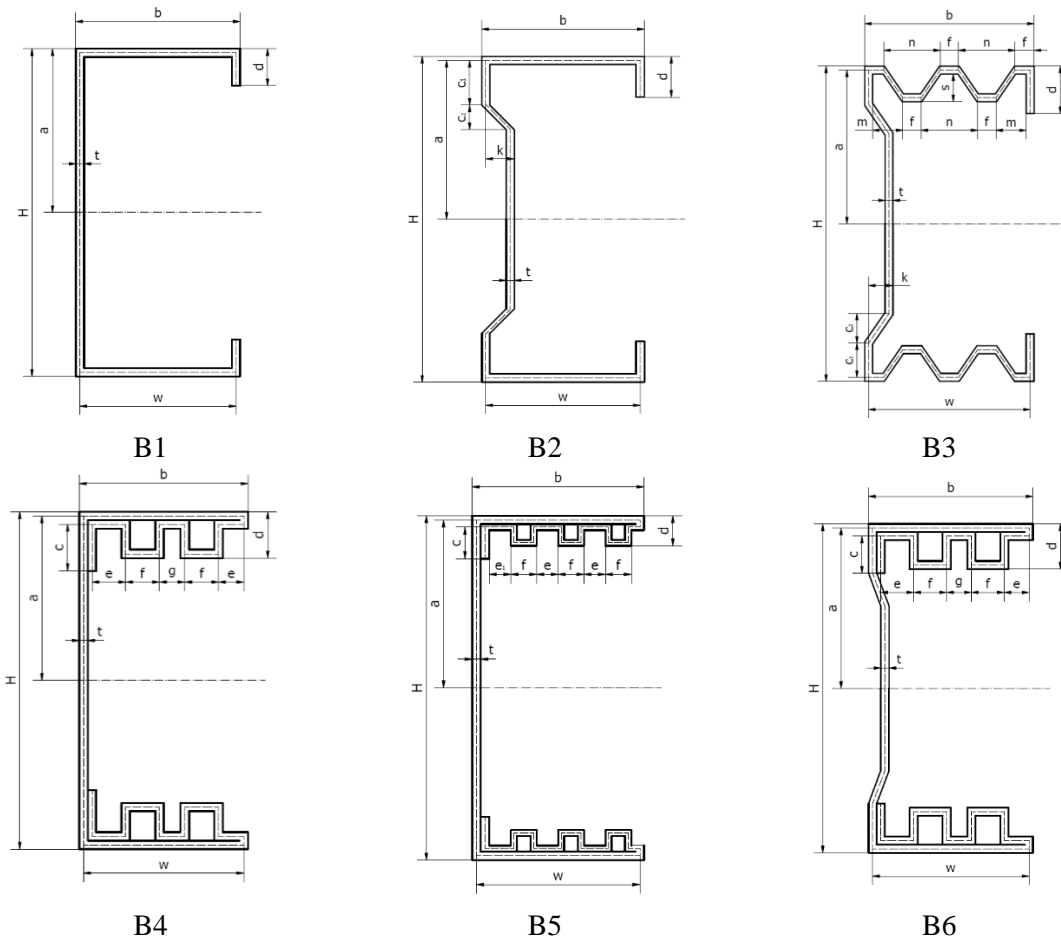
Kształtowniki, stanowiące przedmiot badań w niniejszej pracy, wykonane zostały przez polskie firmy Pruszyński sp. z o.o., Hanbud sp. z o.o. i Zaprom. Jak wcześniej zostało wspomniane, ceowniki te, wytwarzano w technologii formowania na zimno, która polega na kształtowaniu blachy w temperaturze nieprzekraczającej 40% temperatury topnienia. Obecnie do kształtowania blachy, w celu uzyskania zmodyfikowanych kształtów przekroju poprzecznego, używane są giętarki ręczne i/lub półautomatyczne. W związku z tym koszty wytworzenia ceowników o niestandardowych przekrojach poprzecznych są znacznie wyższe, niż w przypadku standardowych kształtowników. Jednakże należy zwrócić uwagę na fakt, że wraz z postępem prac, analiz i badań, które dowodzą pozytywnego wpływu modyfikacji kształtu przekroju poprzecznego na wytrzymałość oraz odporność na utratę stateczności, istnieje realna szansa na zautomatyzowanie wytwarzania tego typu słupów. Istotnym problemem jest jednak „przekonanie” konstruktorów i inżynierów do stosowania kształtowników o zmodyfikowanym kształcie przekroju poprzecznego, przy projektowaniu różnego typu konstrukcji. Producent zauważa, że przyzwyczajenia i umiejętności projektantów oraz konstruktorów, skłaniają ich jednak do wybierania ceowników o standardowym kształcie przekroju poprzecznego. W celu popularyzacji kształtowników stanowiących przedmiot badań niniejszej pracy, konieczna byłaby odpowiednia reklama oraz dobrze przeprowadzony marketing.

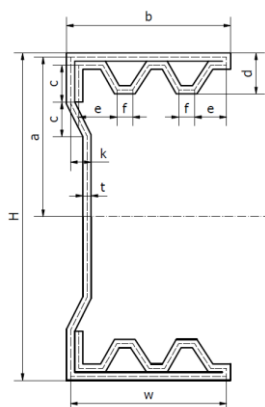
Na rysunku 2.1. przedstawiono kształty analizowanych przekroji poprzecznych. Trzy słupy: B1, B2 i B3 posiadają półki wykonane z pojedynczej blachy, a słupy B4, B5, B6 oraz B7 posiadają półki wykonane z podwójnej blachy. W przypadku drugiej grupy słupów blacha zewnętrzna jest płaska, natomiast blacha wewnętrzna ukształtowana jest w „skrzynki” lub trapezy. Modyfikacji podlega nie tylko kształt półki, ale także kształt środka, co można zaobserwować w przypadku słupów B2, B3, B6 i B7.



Rysunek 2.1. Kształty przekroji poprzecznych słupów, stanowiące przedmiot badań

Przy opisie niestandardowych kształtów przekroji poprzecznych słupów istotne są wymiary oraz wynikające z nich charakterystyki geometryczne, które przedstawiono w rozdziale 3, w tabelach od 3.1 do 3.6. Natomiast na rysunku 2.2. przedstawiono analizowane przekroje poprzeczne wraz z ich długościami, których wartości przedstawiono w tabeli 2.1.





B7

Rysunek 2.2. Kształty przekroi poprzecznych słupów stanowiących przedmiot badań

Tabela 2.1. Właściwości geometryczne i wymiary poprzeczne badanych słupów cienkościennych

Właściwość geometryczna	Symbol	Wymiar [mm]
Wysokość środnika	b	40,00
Szerokość półki	H	80,00
Grubość blachy	t	0,50
Długość zagięcia brzegowego	d	9,00
Półowa wysokości środnika mierzona względem linii środkowej	a	39,75
Szerokość półki mierzona względem linii środkowej	w	39,50
Wymiar zagięcia na środniku	c_1	9,75
	c_2	7,50
	k	5,00
Wysokość zagięcia na półce	s	7,00
	m	8,00
	f	5,00
Wymiar zagięcia na półce	n	13,00
	e	6,00
	g	7,00
	c	7,50
	e_1	6,00

Wszystkie analizowane słupy posiadały takie same wymiary zewnętrzne przekrojów poprzecznych, oraz jednakową długość całkowitą równą 1000 mm. Blacha, z której wykonano słupy miała grubość 0,5 mm.

3. Rozwiązanie analityczne

3.1. Metody projektowania kształowników cienkościennych

Rozwijające się technologie pozwalają na formowanie coraz bardziej niestandardowych, cienkościennych kształowników stalowych o otwartych przekrojach poprzecznych. W tego typu konstrukcjach głównym problemem jest określenie wytrzymałości oraz parametrów związanych z ich utratą stateczności. Modyfikacja kształtu przekroju poprzecznego cienkościennych kształowników wymusza nowe spojrzenie na stan przemieszczeń i odkształceń oraz na postacię wyboczenia i mechanizmy zniszczenia. W projektowaniu belek/słupów ze stali formowanej na zimno wyzwaniem jest uwzględnienie coraz większych modyfikacji kształtów przekrojów poprzecznych. Obecnie najczęściej stosowane są takie metody projektowania konstrukcji cienkościennych, które nie są w stanie sprostać dużej modyfikacji kształtu przekroju poprzecznego słupów/belek, a rezultaty uzyskane na podstawie tych metod projektowania obarczone są dużym błędem.

Metody analityczne pozwalają na wyznaczenie w konstrukcjach cienkościennych obciążeń krytycznych. Ponadto określa się również wytrzymałość i nośność graniczną tych konstrukcji. Jednakże, w przypadku analizy profili o zmodyfikowanych kształtach przekrojów poprzecznych, konieczna jest walidacja uzyskanych wyników, ponieważ na chwilę obecną istniejące metody nie są w pełni dostosowane do projektowania tak złożonych kształtów konstrukcji.

Najbardziej popularnymi metody projektowania zimnogiętych konstrukcji cienkościennych są: metoda szerokości efektywnej (*ang. EWM - Effective Width Method*), metoda wytrzymałości bezpośredniej (*ang. DSM – Direct Strength Method*) oraz uogólniona teoria wytrzymałości (*ang. GBT – Generalized Beam Theory*). Ponadto znane są inne metody takie jak: metoda zredukowanych naprężeń (*ang. Reduced Stress*), metoda efektywnej grubości (*ang. Effective Thickness*) czy metoda współczynnika Q (*ang. Q-factor*) oraz metoda wytrzymałości ciągłej (*ang. CSM - Continuous Strength Method*).

3.1.1. Metoda wytrzymałości bezpośredniej (*ang. DMS*) i metoda wytrzymałości ciągłej (*ang. CMS*)

Metoda wytrzymałości bezpośredniej powstała w 2004 roku i stanowiła załącznik do amerykańskiej normy AISI. Schafer [17] opracował przewodnik, który miał dostarczyć inżynierom praktycznych wskazówek dotyczących stosowania tej metody. DSM nie wymaga określania szerokości efektywnej ani wykonywania kolejnych iteracji obliczeniowych w celu określenia wytrzymałości elementu konstrukcyjnego. Zamiast tego należy określić sprężyste obciążenie

wyboczeniowe przy ogólnej, miejscowej lub dystorsyjnej utracie stateczności. Informacje te, wraz z obciążeniem odpowiadającym granicy plastyczności, są następnie używane w szeregu prostych równań do „bezpośredniego” prognozowania wytrzymałości. Metoda DSM została przyjęta przez amerykańską i australijską normę do projektowania elementów ze stali formowanej na zimno. Metoda ta może być z powodzeniem stosowana do projektowania kształtowników wykonanych w technologii spawania czy walcowania na gorąco. Rozwój metody DSM, nakierowany na konstrukcje spawane, opisany został przez Kwona [18]. Natomiast w pracy Papangelisa i in. [19] wyprowadzono równania sformułowane na podstawie procedur zawartych w metodzie DSM w celu określenia nośności na ścinanie belek z trapezowym środkiem. Innowacyjna koncepcja, dzięki której zwiększono nośność belek stalowych formowanych na zimno poprzez zastosowanie technik sprężania wstępnego, opisana została przez Hadjipantelisa i in. [20]. Siła sprężająca przyłożona jest za pomocą liny stalowej o wysokiej wytrzymałości, która zamocowana jest, mimośrodowo w odniesieniu do głównej osi bezwładności, w dolnej półce belki, wywołując w niej naprężenia początkowe, które są przeciwne do tych wprowadzonych podczas etapu obciążania. Dla zaproponowanych belek nośność zarówno w trakcie sprężania, jak i w trakcie obciążania opisana została w postaci wyrażeń algebraicznych, podczas gdy kryteria zniszczenia dla konstrukcji belek i liny stalowej zostały opracowane przez zastosowanie metody DSM.

Wytrzymałość na ściskanie, kształtowników o przekroju otwartym i zamkniętym formowanych na zimno, przedstawiona w pracy [21], została określona na podstawie metod doświadczalnych, numerycznych oraz DSM. Uzyskane wyniki wykazały, że procedury obliczeniowe zawarte w równaniach DSM są zbyt konserwatywne, aby poprawnie określić nośność nowo zaprojektowanych słupów o złożonych przekrojach. Przedstawiono modyfikację równań, tak aby dostosować je do niestandardowych kształtów przekrojów poprzecznych. Stwierdzono, że zmodyfikowane wzory zapewniają bardziej precyzyjne prognozowanie wytrzymałości kształtowników omawianych w tej pracy. Celem pracy [22] jest rozszerzenie metody CSM i DSM oraz metody Kato, do projektowania spawanych dwuteowników poddanych zginaniu. Projektowanie ram portalowych wykonanych ze stali profilowanej na zimno w oparciu o metodę DSM i metodę bezpośredniego projektowania przedstawiono w artykule Rincheny i in. [23]. Metodę DSM zastosowano do określenia nośności obliczeniowej ram z uwzględnieniem wpływu bimomentu.

W pracy Saliba i Garndera [24] opisano CSM, jako metodę służącą do projektowania konstrukcji metalowych opartą na jej deformacji. Zastosowanie metody CSM do projektowania ustrojów stalowych opisane zostało także przez Gardnera [25]. Zaproponowane w tej publikacji podejście zapewnia lepszą zgodność wyników, z tymi uzyskanymi na podstawie badań

doświadczalnych, niż z wynikami uzyskanymi na podstawie obliczeń przeprowadzonych zgodnie z procedurami zawartymi w normach dotyczących projektowania ustrojów cienkościennych. Rozszerzenie zakresu metody CSM o kształtowniki smukłe wykonane ze stali nierdzewnej przedstawione zostało przez Ahmeda i in. [26]. Przeprowadzone zostały analizy z zastosowaniem metody elementów skończonych oraz badania doświadczalne, które pozwoliły na zaproponowanie nowych wytycznych dla metody CSM przy projektowaniu ustrojów cienkościennych poddanych zginaniu i ściskaniu. Rozszerzoną metodę CSM zastosowano do projektowania smukłych słupów o przekrojach grubościennych poddanych ściskaniu, zginaniu lub obciążeniu złożonemu [27]. Zaproponowane podejście pozwoliło na uzyskanie wyników o większej dokładności oraz lepszej efektywności projektowej przy obliczeniach smukłych słupów, w porównaniu z podejściem przedstawionym w znanych normach.

Przegląd literaturowy wykazał, że metody DSM i CSM są zbyt konserwatywne, aby móc za ich pomocą prognozować wytrzymałość kształtowników cienkościennych formowanych na zimno. Zmodyfikowanie wzorów DSM i CSM pozwala na uzyskanie bardziej wiarygodnych wyników prowadzonych analiz. Metoda DSM posiada liczne zalety, m.in. pozwala na projektowanie kształtowników, które ulegają wyboczeniu dystorsyjnemu. Ponadto uwzględniona zostaje interakcja pomiędzy półką a środkiem oraz wszystkie stany graniczne utraty stateczności słupów. Jednakże metoda DSM została opracowana jedynie do wyznaczania wytrzymałości przy osiowym ściskaniu i zginaniu, co stanowi jej główne ograniczenie.

3.1.2. Uogólniona teoria wytrzymałości (ang. GBT)

Uogólniona teoria wytrzymałości jest jednowymiarową teorią stosowaną do matematycznego modelowania zginania oraz skręcania belek i stanowi uogólnienie klasycznej teorii belek Eulera-Bernoulliego. Luo i in. [28] w oparciu o metodę GBT przedstawili dwa modele obliczeniowe pozwalające na analizę naprężeń krytycznych w zimnogiętych, cienkościennych belkach ceowych poddanych zginaniu. Program komputerowy oparty na metodzie GBT przedstawiono w pracy Bebiano [29]. Program ten uwzględnia odkształcenie przekroju poprzecznego, wykonuje analizy wyboczenia w zakresie odkształceń sprężystych oraz analizy nietłumionych drgań swobodnych w profilach cienkościennych. W pracy [30] przedstawiono zastosowanie metody GBT do nieliniowej geometrycznej analizy cienkościennych rur okrągłych, pozwalającej na określenie odkształceń w ich przekrojach poprzecznych. Analiza rur zakrzywionych (*ang. curved pipes*) jest znacznie bardziej złożonym zagadnieniem, w porównaniu do analizy rur prostych. W pracy Habtemariam i in. [31] sformułowano liniową uogólnioną teorię

belek służącą do analizy naprężeń i odkształceń dla zakrzywionych, cienkościennych rur o okrągłym przekroju poprzecznym.

Latałski i Zulli [32] zastosowali metodę GBT do analizy belek cienkościennych o krzywoliniowych przekrojach poprzecznych. Gonçalves i Camotim [33] wykonali analizę odkształcenia plastycznego metodą elementów skończonych w cienkościennych profilach metalowych. Celem badań było porównanie uzyskanych wyników z tymi, które otrzymali na podstawie metody GBT. Praca [34] stanowi rozszerzenie badań przedstawionych w artykule [33] poprzez wprowadzenie analizy geometrycznie nieliniowej.

Metoda GBT pozwala na analizę elementów konstrukcyjnych o krzywoliniowych przekrojach wzdłużnych i poprzecznych. Ponadto umożliwia wprowadzanie efektów geometrycznie nieliniowych. Jednakże stosowana jest głównie do analizy elementów poddanych zginaniu i skręcaniu.

3.1.3. Metoda szerokości efektywnej (ang. EWM)

Metoda szerokości efektywnej służy do badania nośności kształtowników stalowych formowanych na zimno. Metoda ta opisana jest w normie Eurokod 3 (*ang. EC3 - Eurocode 3*). W pracy Gatheeshgara i in. [35] określono nośność profili poddanych zginaniu na podstawie metody EWM, ale również za pomocą nieliniowej analizy metodą elementów skończonych. W artykule [36] autorzy zaproponowali metodę projektowania i optymalizacji połączeń śrubowych słupów wykonanych ze stali zimnogiętej. Połączenia te poddane były skręceniu z uwzględnieniem działania bimomentu. W celu określenia wytrzymałości tego połączenia zastosowana została metoda szerokości efektywnej. Ghannam [37] przedstawił wzmocnione ustroje cienkościenne składające się z dwóch połączonych ze sobą kształtowników. Wyzaczył ich nośność przy działaniu momentów zginających. W tym celu zastosował metodę elementów skończonych oraz metody EWM i DSM. Łączenie ze sobą dwóch lub więcej kształtowników cienkościennych w celu wzmocnienia konstrukcji zdaje się zyskiwać na popularności. Na co wskazuje również praca Roya i in. [38], gdzie do wyznaczenia nośności, dwóch połączonych ze sobą ceowników, użyta została metoda EWM. Dobson i in. [39] wyznaczyli wytrzymałość na zginanie kształtowników za pomocą metody EWM. Uzyskane wyniki zweryfikowano przy pomocy metody elementów skończonych. Celem przeprowadzonych badań było zoptymalizowanie kształtu przekroju poprzecznego belki stosowanej w lekkich formach budownictwa (konstrukcje szkieletowe) oraz w budownictwie modułowym.

Metoda szerokości efektywnej, podobnie jak inne procedury obliczeniowe zawarte w normie EC3, znajdują zastosowanie przy obliczaniu kształtowników o klasycznym kształcie

przekroju poprzecznego lub kształtowników, które posiadają niewielkie modyfikacje tego kształtu. Przegląd literaturowy wykazał, że metoda ta nie jest dostosowana do wyznaczania nośności dla stalowych ustrojów cienkościennych o niestandardowym kształcie przekroju poprzecznego.

3.1.4. Zasada stacjonarności energii potencjalnej

Na podstawie zasady stacjonarności energii potencjalnej wyznaczyć można równania równowagi sprężystego pręta cienkościennego. Układ, który osiągnął minimum energii potencjalnej znajduje się w stanie równowagi stabilnej, czyli aby wytrącić ten układ z położenia równowagi trzeba zadziałać na niego z pewną minimalną wartością zakłócenia. Zastosowanie zasady minimum energii potencjalnej oraz rachunku wariacyjnego, przez Lagrange'a, pozwoliło na wyprowadzenie równań, które mają kluczowe znaczenie w mechanice analitycznej.

Wu i in. [40] przedstawili model analityczny oparty na zasadzie stacjonarności energii potencjalnej do badania zachowania się kształtowników ceowych bez i z usztywnieniami, poddanych osiowemu ścisaniu lub czteropunktowemu zginaniu. W artykule Szymczaka i Kujawy [41] przeanalizowano belki i słupy poddane zginaniu lub ścisaniu osiowemu. Profile wykonane były z aluminium. Celem pracy było określenie wytrzymałości i odporności na utratę stateczności tych kształtowników. Nieliniowe równania różniczkowe opisujące to zagadnienie wyprowadzono na podstawie zasady stacjonarności energii potencjalnej oraz na podstawie założeń klasycznej teorii belek. Magnucki [42] wykonał analizę matematyczną swobodnie podpartych belek warstwowych i dwuteowych. Belki obciążono momentem zginającym (trypunktowe zginanie) lub obciążeniem równomiernie rozłożonym. Ponadto uwzględniono dwa modele deformacji płaskich przekrojów poprzecznych: teorię zygzakową (*ang. zig-zag theory*) oraz teorię nieliniową, czyli hipotezę wielomianową. W oparciu o zasadę stacjonarności energii potencjalnej uzyskano równania różniczkowe równowagi statycznej. Ten układ równań został rozwiązany analitycznie dla dwóch typów obciążenia, a następnie obliczono ugięcia dla kilku przykładowych belek. Celem pracy Binh i in. [43] jest zbadanie utraty stateczności belek cienkościennych o bisymetrycznych przekrojach poprzecznych. Profile obciążono osiową siłą ścisającą, równomiernie rozłożonym obciążeniem lub momentem zginającym. Zagadnienie rozwiązano przy pomocy metod energetycznych. Szymczak i Kujawa [44] zbadali utratę stateczności osiowo ścisanych słupów o zamkniętym przekroju kwadratowym bez lub z usztywnieniami wewnętrznymi. Zasadnicze równanie różniczkowe wyprowadzono z zasady stacjonarności całkowitej energii potencjalnej. Obciążenie krytyczne dla słupów podpartych swobodnie przedstawiono w postaci analitycznej i porównano je z rozwiązaniem uzyskanym na podstawie metody elementów skończonych.

W pracy Lu i in. [45] zajęli się wyprowadzeniem nowych wzorów określających siłę krytyczną przy wyboczeniu miejscowym, dla zimnogiętych słupów ceowych, w których uwzględniony został kształt przekroju poprzecznego oraz warunki brzegowe. W tym celu zastosowali metodę doświadczalną oraz analizy numeryczne. Przedstawione przez nich modele opierał się na teorii Bleicha. W artykule [46] opisano algorytm służący do nieliniowej analizy wyboczenia ogólnego cienkościennych laminowanych belek kompozytowych. Algorytm ten został opracowany na podstawie zasady prac wirtualnych. Wykonane zostały również analizy numeryczne metodą elementów skończonych, gdzie zastosowano jednowymiarowy element skończony przy założeniu dużych przemieszczeń oraz dużych kątów obrotu dla małych odkształceń.

Zasada stacjonarności energii potencjalnej może być stosowana do obliczeń związanych z utratą stateczności. Przy zastosowaniu tej zasady możliwe jest wyznaczenie wartości obciążenia krytycznego, dla którego energia ustroju osiąga maksymalną wartość. Metoda ta znajduje zastosowanie w analizach teoretycznych jak i numerycznych.

3.2. Normy stosowane przy projektowaniu konstrukcji cienkościennych

Normy dotyczą standardów, wytycznych lub zasad, które określają wymagania, procedury, metody lub praktyki związane z określoną dziedziną lub branżą. Przy projektowaniu kształtowników formowanych na zimno stosuje się normy, które określają wymagania techniczne oraz metody dotyczące projektowania, produkcji i montażu tych elementów. Normy te mogą zawierać m.in. wymagania dotyczące materiałów, wymiarów, wytrzymałości, odporności ogniowej, odporności na utratę stateczności oraz testów, analiz w tym badań profil cienkościennych formowanych na zimno.

Poniżej opisane zostały normy: europejska EC3, amerykańska ANSI/AISC 360-16 i australijska AS 4100-1998. Dotyczą one m.in. projektowania kształtowników formowanych na zimno.

3.2.1. Eurokod 3

Norma Eurokod 3 (EC3) składa się z aż dwudziestu części/rozdziałów, co wynika ze złożoności modeli obliczeniowych oraz ze specyfiki kryteriów oceny nośności różnego rodzaju konstrukcji. Normy te opisują zagadnienia projektowania budynków, ale również obiektów inżynierskich, w tym konstrukcji z blachy formowanej na zimno. Stosując EC3 należy zwrócić uwagę na fakt, że poszczególne części tej normy należy stosować w powiązaniu z innymi częściami wchodzącymi jej w skład [47].

W pracy [48] dokonano oceny możliwości zastosowania normy EC3 do wyznaczania nośności krótkich słupów o różnych kształtach przekrojów poprzecznych. Słupy obciążone były osiową siłą ściskającą. Autorzy przeanalizowali wpływ wyboczenia miejscowego na wytrzymałość i odporność na utratę stateczności tych profili. Stwierdzili, że warunki brzegowe mają istotny wpływ na wyboczenie skrętne (*ang. torsional buckling*), a tym samym na nośność analizowanych kształtowników. Szczerba [49] przedstawił analizę nośności i utraty stateczności profili, o przekrojach ceowych, obciążonych w płaszczyźnie równoległej do środka. Płaszczyzna ta nie przechodziła przez środek ścinania przekroju poprzecznego kształtownika. Analizy wykonane zostały na podstawie obowiązujących Eurokodów oraz polskiej normy PN-90/B-3200. Gao i in. [50] zbadali nośność i mechanizmy zniszczenia cienkościennych elementów konstrukcyjnych wykonanych ze stali wysokowytrzymałej. Przeprowadzili analizy numeryczne oraz badania doświadczalne, które następnie porównali z wynikami uzyskanymi na podstawie norm służących do projektowania konstrukcji stalowych GB50017-2017, ANSI/AISC 360-16 i EC3. Cao i in. [51] wykonali analizy parametryczne, aby zbadać wpływ dwóch parametrów, tj. stosunku szerokości do grubości oraz współczynnika smukłości słupów, na zachowanie wyboczeniowe elementów poddanych ścisaniu osiowemu. Przeprowadzili analizy metodą elementów skończonych oraz badania doświadczalne. Ponadto przy pomocy procedur zawartych w normach: GB50017-2017, EC3, AISC 360-16, wyznaczone zostały wartości obciążenia krytycznego. Autorzy stwierdzili, że normy EC3 i GB50017-2017 zaniżają, a norma AISC 360-16 zawyża wartość tego obciążenia. Maia i in. [52] zbadali stateczność słupów i belek o zmodyfikowanym kształcie środka. Obliczenia wykonali zgodnie z procedurami zawartymi w EC3. Zaproponowane przez nich podejście pozwoliło na dokładniejsze przewidywanie zachowania tych elementów konstrukcyjnych w warunkach pożaru, co ma duże znaczenie dla bezpieczeństwa budynków. Tankova i in. [53] opisali nośność kształtowników wykonanych ze stali szybkoctnej (*ang. High Speed Steel - HSS*). Autorzy do oceny nośności słupów i belek wykonanych z HSS zastosowali procedury projektowe zawarte w normie europejskiej EC3 oraz normie amerykańskiej AISC 360. Cienkościenne słupy ceowe, formowane na zimno, obciążone siłą ściskającą opisane zostały w pracy Fenga i in. [54]. Celem pracy było zbadanie zachowania się tych profili w warunkach podwyższonej temperatury, np. pożaru. Autorzy przedstawili wyniki analiz analitycznych z użyciem różnych narzędzi obliczeniowych, zawartych w normie brytyjskiej BS5950, normie europejskiej EC3 oraz amerykańskiej specyfikacji AISI oraz metod numerycznych. Rozwiązania przedstawione w wyżej wymienionych normach zostały zmodyfikowane, tak aby możliwe było uwzględnienie wyboczenia dystorsyjnego, wpływu otworów eksploatacyjnych oraz działania podważonych temperatur. Ungermann i in. [55] opisali badania doświadczalne i obliczenia analityczne, przedstawione

w normie EC3, do projektowania cienkościennych ceowników w warunkach utraty stateczności. Na podstawie wyników badań doświadczalnych autorzy przedstawili modyfikacje metody szerokości efektywnej i grubości efektywnej proponowanej przez Eurokod 3 w część 1-3. Ye i in. [56] wykonali badania doświadczalne, które na celu miały zbadanie interakcji pomiędzy wyboczeniem miejscowym i ogólnym ceowych kształtowników wykonanych ze stali formowanej na zimno. Opisywane przez nich profile obciążone były osiową siłą ściskającą. Wyniki badań doświadczalnych wykorzystali do weryfikacji procedur projektowych zawartych w normie EC3.

3.2.2. ANSI/AISC 360-16 Specyfikacja konstrukcji stalowych (*ang. Specification for Structural Steel Buildings*)

Amerykańska specyfikacja ANSI/AISC 360-16 wydana została w 2016 roku przez American Institute of Steel Construction (AISC) i dotyczy projektowania konstrukcji stalowych. Norma ta określa zasady tworzenia i oceny projektów budowlanych oraz konstrukcji stalowych. Specyfikacja ANSI/AISC 360-16 obejmuje szeroki zakres zagadnień, np.: obliczenia związane z nośnością i wytrzymałością konstrukcji oraz projektowanie połączeń w tych strukturach. Warto zwrócić uwagę na fakt, że norma ta zawiera również zasady projektowania związane ze statecznością konstrukcji. Jednakże w tej specyfikacji uwzględniona została jedynie ogólna utrata stateczności.

Yang i in. [57] przeprowadzili badania doświadczalne i analizy numeryczne związane z zachowaniem wyboczeniowym spawanych słupów o przekroju skrzynkowym (*ang. rectangular hollow section lub box section*). Słupy obciążone były osiową siłą ściskającą. Wyniki wykonanych badań porównali z wynikami obliczeń analitycznych, które uzyskane zostały na podstawie procedur przedstawionych w normach: ANSI/AISC 360-10 oraz EC3. Stwierdzili, że obliczenia analityczne nieznacznie zawyżają wartości wyznaczanych parametrów. Chen i in. [58] przedstawili badania doświadczalne ośmiokątnych rur stalowych wypełnionych betonem. Kształtowniki poddane były działaniu osiowej siły ściskającej. Wyniki wykonanych badań zostały wykorzystane do oceny możliwości zastosowania aktualnych zasad projektowania zawartych w Eurokodzie EN 1994-1-1, normie amerykańskiej ANSI/AISC 360-16 oraz specyfikacji chińskiej GB 50936-2014. Największą zgodność wyników uzyskano w przypadku zastosowania specyfikacji chińskiej. Wielu badaczy do oceny przydatności procedur projektowych zawartych w normach stosuje badania doświadczalne. Cao i in. [59] zastosowali badania doświadczalne do oceny przydatności normy amerykańskiej ANSI/AISC oraz normy europejskiej EC3.

Alrubaidi i in. [60] podjęli ciekawy temat związany z ryzykiem zawalenia się jednokondygnacyjnych ram stalowych, w których jeden ze słupów został uszkodzony. Próbk

wykorzystane do badań zaprojektowane zostały zgodnie z wytycznymi zawartymi w normach: ANSI/AISC 358-16, EC3 oraz specyfikacji tureckiej TEC-2007. Tego typu prace badawcze mają na celu lepsze zrozumienie zachowania się konstrukcji w przypadku jej awarii lub uszkodzenia elementów konstrukcyjnych. Sun i in. [61] przeprowadzili badania, w których zastosowali normę europejską, australijską oraz amerykańską do prognozowania nośności smukłych spawanych dwuteowników, które ulegają wyboczeniu. Analizy wykazały, że Eurokod i norma australijską są zbyt zachowawcze przy prognozowaniu tej nośności, natomiast norma amerykańska daje akceptowalną dokładność projektową. Gao i in. [62] wykonali badania doświadczalne ściskanych osiowo słupów w celu oceny ich odporności na utratę stateczności. Ponadto wykonano symulację numeryczną. Uzyskane wyniki posłużyły do weryfikacji procedur zawartych w chińskiej specyfikacji GB50017-2003, amerykańskiej ANSI/AISC 360-10 oraz w EC3.

3.2.3. AS 4100-1998 Konstrukcje stalowe (*ang. Steel structures*)

Norma australijska AS 4100-1998 dostarcza projektantom konstrukcji stalowych procedury obliczeniowe dla elementów konstrukcyjnych stosowanych w budynkach i innych strukturach. Określa minimalne wymagania dotyczące projektowania, produkcji, montażu oraz modyfikacji konstrukcji stalowych zgodnie z metodą projektowania stanów granicznych. Specyfikacja znajduje swoje zastosowanie przy projektowaniu budynków, konstrukcji stalowych, ale również mostów drogowych, kolejowych i pieszych.

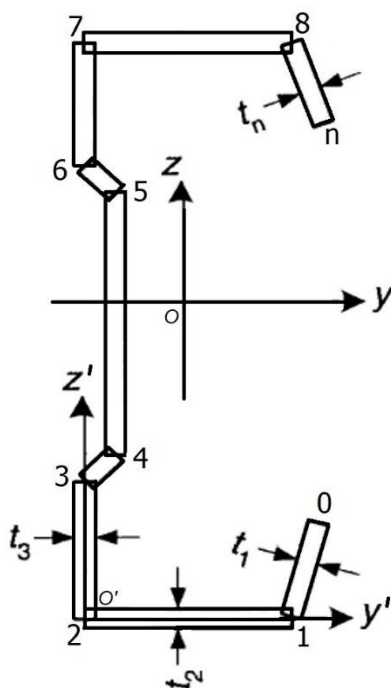
Hancock i in. [63] wykorzystali procedury projektowe zawarte w normie australijskiej do analizy stateczności konstrukcji stalowych. Obciążenie wyboczeniowe wyznaczyli przy pomocy metody pasm skończonych. Rossi i in. [64] stwierdzili, że przy wyznaczaniu nośności belek dwuteowych, które ulegają wyboczeniu dystorsyjnemu, procedury zawarte w normie EC3 pozwalają na wykorzystanie odpowiedzi z analizy stateczności sprężystej do obliczania momentu granicznego. Ponadto stwierdzili, że można wprowadzić korekty do norm ANSI/AISC 360-16 i AS 4100: 1998, które umożliwią uzyskanie wyników o zadowalającej dokładności.

Przedstawione prace dotyczące wykorzystania procedur zawartych w normach wykazały, że nie są one dostosowane do określania odporności na utratę stateczności cienkościennych słupów czy belek. Do wzorów przedstawionych w wyżej wymienionych normach konieczne jest wprowadzenie modyfikacji tak aby prognozowane wartości parametrów były zgodnie z wynikami uzyskanymi na podstawie innych metod.

3.3. Właściwości geometryczne przekrojów poprzecznych słupów

Kształtowniki cienkościenne dzielimy na takie o przekroju otwartym i zamkniętym. Profil o przekroju poprzecznym otwartym to taki, w którym linia środkowa nie tworzy obwodów zamkniętych. Przykładami takich kształtowników są: teowniki, dwuteowniki, zetowniki lub ceowniki. Natomiast przekrój poprzeczny zamknięty to taki, w którym linia środkowa tworzy obwód zamknięty.

Charakterystyki geometryczne przekroji poprzecznych można wyznaczyć na podstawie procedur obliczeniowych przedstawionych w normie EC3. Są one zawarte w załączniku C do tej normy. Procedura ta polega na podziale przekroju poprzecznego na n części, a każdą z tych części należy ponumerować odpowiednio od 1 do n . Następnie określa się węzły i numeruje od 0 do n . Po tym podziale przekrój poprzeczny podzielony jest na i części, z których każda określona jest przez węzły $i - 1$ oraz i . Każdej z części przypisuje się grubość (nominalną lub efektywną). Należy również określić pierwotny układ współrzędnych $O'y'z'$, który zilustrowany został na rysunku 3.1. Wprowadzono także centralny układ współrzędnych Oyz , gdzie $O = C$ i punkt C jest środkiem przekroju.



Rysunek 3.1. Schemat obliczeniowy według normy EC3, załącznik C [65]

Pole przekroju poprzecznego oznaczane jest symbolem A i wyraża się w jednostce mm^2 . Na rysunku 3.1. pokazano przekrój podzielony na 9 części, dla każdej z tych części można obliczyć pole przekroju poprzecznego za pomocą wzoru:

$$dA_i = [t_i \cdot \sqrt{(y'_i - y'_{i-1})^2 + (z'_i - z'_{i-1})^2}] \quad (1)$$

Natomiast całkowite pole przekroju poprzecznego wyraża się wzorem:

$$A = \sum_{i=1}^n dA_i \quad (2)$$

Moment statyczny określono względem osi y' i osi z' , oraz oznacza się go symbolami $S_{y'}$ i $S_{z'}$.

Momenty statyczne wyraża się w jednostce mm^3 i przy pomocy wzorów:

$$S_{y'} = \sum_{i=1}^n (z'_i + z'_{i-1}) \frac{dA_i}{2} \quad (3)$$

$$S_{z'} = \sum_{i=1}^n (y'_i + y'_{i-1}) \frac{dA_i}{2} \quad (4)$$

Współrzędne środka ciężkości C przekroju poprzecznego określa się wzorami:

$$z'_C = \frac{S_{y'}}{A} \quad (5)$$

$$y'_C = \frac{S_{z'}}{A} \quad (6)$$

Zatem można wprowadzić centralny układ współrzędnych Cyz . Zależności pomiędzy współrzędnymi w obu układach są następujące:

$$y = y' - y'_C \quad y' = y - y_{0'} \quad (7)$$

$$z = z' - z'_C \quad z' = z - z_{0'} \quad (8)$$

Osiowe moment bezwładności $I_{y'}$ i $I_{z'}$, oraz odśrodkowy moment bezwładności $I_{y'z'}$ względem osi w pierwotnym układzie współrzędnych $O'y'z'$ wyrażają się w jednostce mm^4 i przy pomocy wzorów:

$$I_{y'} = \sum_{i=1}^n (z_i'^2 + z_{i+1}'^2 + z_i' \cdot z_{i+1}') \frac{dA_i}{3} \quad (9)$$

$$I_{y'z'} = \sum_{i=1}^n (2 \cdot y'_{i-1} \cdot z'_{i-1} + 2 \cdot z'_i \cdot y'_i + y'_{i-1} \cdot z'_i + y'_i \cdot z'_{i-1}) \frac{dA_i}{6} \quad (10)$$

$$I_{z'} = \sum_{i=1}^n [y_i'^2 + y_{i+1}'^2 + y_i' \cdot y_{i+1}'] \frac{dA_i}{3} \quad (11)$$

Natomiast moment bezwładności względem centralnego układu współrzędnych Cyz wyrażają się w jednostce mm^4 i przy pomocy wzorów:

$$I_y = I_{y'} - A \cdot z'^2_C \quad (12)$$

$$I_{yz} = I_{y'z'} - A \cdot y'_C \cdot z'_C \quad (13)$$

$$I_z = I_{z'} - A \cdot y'^2_C \quad (14)$$

Położenie głównych osi bezwładności opisuje się formułą matematyczną:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}\right) \quad (15)$$

Ekstremalne momenty bezwładności określa się przy pomocy wzorów:

$$I_\xi = \frac{1}{2} \left[I_y + I_z + \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2} \right] \quad (16)$$

$$I_\eta = \frac{1}{2} \left[I_y + I_z - \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2} \right] \quad (17)$$

Wyznaczając współrzędne wycinkowe ω posłużono się pomocniczymi współrzędnymi wycinkowymi ω^* , dla których przyjęto, że biegun główny znajduje się w punkcie O' (początek pomocniczego układu współrzędnych), a biegun zerowy w punkcie 0. Stąd:

$$\omega^*_{O',0} = 0 \quad (18)$$

oraz

$$d\omega_{O',i} = y'_{i-1} \cdot z'_i - y'_i \cdot z'_{i-1} \quad (19)$$

$$\omega_{O',i} = \omega_{O',i-1} + d\omega_{O',i} \quad (20)$$

Wycinkowy moment statyczny wyraża się wzorem:

$$S_{\omega_{O'}} = \sum_{i=1}^n (\omega^*_{O',i-1} + \omega^*_{O',i}) \frac{dA_i}{2} \quad (21)$$

Wycinkowe odśrodkowe momenty bezwładności względem osi pierwotnych y' i z' wyraża się wzorami:

$$I_{y'\omega_{O'}} = \sum_{i=1}^n (2 \cdot z'_{i-1} \cdot \omega^*_{O',i-1} + 2 \cdot z'_i \cdot \omega^*_{O',i} + z'_{i-1} \cdot \omega^*_{O',i} + z'_i \cdot \omega^*_{O',i-1}) \frac{dA_i}{6} \quad (22)$$

$$I_{z'\omega_{O'}} = \sum_{i=1}^n (2 \cdot y'_{i-1} \cdot \omega^*_{O',i-1} + 2 \cdot y'_i \cdot \omega^*_{O',i} + y'_{i-1} \cdot \omega^*_{O',i} + y'_i \cdot \omega^*_{O',i-1}) \frac{dA_i}{6} \quad (23)$$

Wycinkowe odśrodkowe momenty bezwładności względem osi centralnych y i z wyraża się wzorami:

$$I_{y\omega_{O'}} = I_{y'\omega_{O'}} - \frac{S_{y'} \cdot S_{\omega_{O'}}}{A} \quad (24)$$

$$I_{z\omega_{O'}} = I_{z'\omega_{O'}} - \frac{S_{z'} \cdot S_{\omega_{O'}}}{A} \quad (25)$$

Natomiast wycinkowy moment bezwładności wyraża się wzorami:

$$I_{\omega_{O'}^*} = \sum_{i=1}^n [\omega_{O',i}^{*2} + \omega_{O',i-1}^{*2} + \omega_{O',i}^* \cdot \omega_{O',i-1}^*] \frac{dA_i}{3} \quad (26)$$

Równania różniczkowe opisujące przemieszczenia pręta znacznie się upraszczają, gdy współrzędna wycinkowa spełnia warunki:

$$S_{\omega} = 0 \qquad I_{y\omega} = 0 \qquad I_{z\omega} = 0 \quad (27)$$

Z powyższych warunków można wyznaczyć wartości głównej współrzędnej wycinkowej.

$$\omega = \omega_{O'}^* + (z_S - z_{O'})y - (y_S - y_{O'})z - \frac{S_{\omega_{O'}^*}}{A} \quad (28)$$

gdzie S to biegun główny, którego współrzędne w układzie Cyz wynoszą:

$$y_S = y_{O'} + \frac{I_{y\omega_{O'}^*} \cdot I_z - I_{z\omega_{O'}^*} \cdot I_{yz}}{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2} \quad (29)$$

$$z_S = z_{O'} - \frac{I_{z\omega_{O'}^*} \cdot I_y - I_{y\omega_{O'}^*} \cdot I_{yz}}{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2} \quad (30)$$

a w układzie O'y'z':

$$y'_S = y_S - y_{O'} \quad (31)$$

$$z'_S = z_S - z_{O'} \quad (32)$$

Wycinkowy moment bezwładności wyraża się formułą matematyczną:

$$I_{\omega} = I_{\omega_{O'}^*} - (y_S - y_{O'})I_{y\omega_{O'}^*} + (z_S - z_{O'})I_{z\omega_{O'}^*} - \frac{S_{\omega_{O'}^*}^2}{A} \quad (33a)$$

lub

$$I_{\omega} = I_{\omega_{O'}^*} - (y_S - y_{O'})^2 I_y + 2(y_S - y_{O'})(z_S - z_{O'}) I_{yz} - (z_S - z_{O'})^2 I_z - \frac{S_{\omega_{O'}^*}^2}{A} \quad (33b)$$

Moment bezwładności przy skręcaniu wyraża się wzorem:

$$I_s = \sum_{i=1}^n dA_i \cdot \frac{(t_i)^2}{3} \quad (34)$$

Wskaźnik wytrzymałości przy skręcaniu wyraża się formułą matematyczną:

$$W_t = \frac{I_s}{\min(t)} \quad (35)$$

Natomiast wycinkowy wskaźnik wytrzymałości wyraża się wzorem:

$$W_{\omega} = \frac{I_{\omega}}{\max\{\omega\}} \quad (36)$$

Środek ścinania w literaturze nazywany jest również biegunem. Natomiast biegunowy moment bezwładności względem środka ścinania wyraża się formułą matematyczną:

$$I_p = I_y + I_z + A(y_s^2 + z_s^2) \quad (37)$$

Według powyższych formuł matematycznych wyznaczono charakterystyki geometryczne analizowanych przekroi poprzecznych. Poniższe tabele przedstawiają wyniki obliczeń wykonanych zgodnie z normą EC3.

Tabela 3.1. Pole przekroju poprzecznego i momenty statyczne przekroju względem osi y' i z'

Słup	A	$S_{y'}$	$S_{z'}$
B1	88,00	3498,00	1125,75
B2	91,03	3618,49	1304,73
B3	105,69	4201,92	1403,55
B4	166,25	6608,44	2383,63
B5	162,00	6439,50	2330,50
B6	164,88	6553,87	2434,58
B7	163,57	6501,81	2397,74

gdzie: A – pole przekroju poprzecznego [mm^2]

$S_{y'}$ – moment statyczny przekroju względem osi y' – y' [mm^3]

$S_{z'}$ – moment statyczny przekroju względem osi z' – z' [mm^3]

Tabela 3.2. Współrzędne środka ciężkości przekroju poprzecznego

Słup	z'_c	y'_c
B1	39,75	12,79
B2	39,75	14,33
B3	39,75	13,28
B4	39,75	14,34
B5	39,75	14,39
B6	39,75	14,77
B7	39,75	14,66

gdzie: z'_c, y'_c – współrzędne środka ciężkości przekroju poprzecznego figury [mm]

Tabela 3.3. Momenty bezwładności przekroju względem osi centralnych, odśrodkowy moment bezwładności, ekstremalne momenty bezwładności

Słup	I_y	I_z	I_{yz}	α	I_ξ	I_η
B1	94353,79	19794,19	0	0	94353,79	19794,19
B2	96257,38	16634,60	0	0	96257,38	16634,60
B3	82822,96	17352,72	0	0	82822,96	17352,72
B4	187253,23	27583,09	0	0	187253,23	27583,09

B5	193680,15	27018,87	0	0	193680,15	27018,87
B6	187106,02	24406,47	0	0	187106,02	24406,47
B7	186203,96	23260,92	0	0	186203,96	23260,92

gdzie: I_y – moment bezwładności przekroju względem osi centralnej y [mm³]

I_z – moment bezwładności przekroju względem osi centralnej z [mm³]

I_{yz} – odśrodkowy moment bezwładności względem osi centralnych [mm³]

α - położenie głównym osi bezwładności [°]

I_{ξ}, I_{η} – ekstremalne momenty bezwładności [mm³]

Tabela 3.4. Wycinkowy moment bezwładności, moment bezwładności przy skręcaniu i biegunowy moment bezwładności

Słup	I_{ω}	I_s	I_p
B1	25926507,00	7,33	201749,54
B2	26635576,30	7,59	164918,12
B3	15477933,68	8,44	169861,84
B4	40864559,40	13,85	452878,92
B5	34655274,63	13,50	422333,39
B6	37302450,14	13,74	364354,25
B7	35161420,43	13,63	359084,58

gdzie: I_{ω} – wycinkowy moment bezwładności [mm⁴]

I_s – moment bezwładności przy skręcaniu [mm⁴]

I_p – biegunowy moment bezwładności [mm⁴]

Tabela 3.5. Współrzędne środka ścinania względem pierwotnego układu współrzędnych oraz względem środka ciężkości

Słup	$y_{s'}$	$z_{s'}$	y_s	z_s
B1	-18,76	39,75	-31,55	0
B2	-9,57	39,75	-23,91	0
B3	-11,99	39,75	-25,28	0
B4	-23,50	39,75	-37,84	0
B5	-20,89	39,75	-35,28	0
B6	-15,68	39,75	-30,45	0
B7	-15,59	39,75	-30,24	0

gdzie: $y_{s'}, z_{s'}$ – współrzędne środka ścinania [mm]

y_s, z_s – współrzędne środka ścinania względem środka ciężkości [mm]

3.4. Wyprowadzenie równań równowagi drugiego rzędu

Niniejszy rozdział opracowany został na podstawie monografii Ostwalda i Magnuckiego [66], która dotyczy optymalnego projektowania konstrukcji cienkościennych wytwarzanych

w technologii formowania na zimno. Autorzy tej pracy opisali nie tylko optymalizację ustrojów cienkościennych, ale również zagadnienia związane z utratą stateczności, co w przypadku analizy takich konstrukcji jest szczególnie ważne.

Teoria Własowa, znana również jako teoria płaskich powłok, traktuje ustroje cienkościenne o otwartych przekrojach poprzecznych jako długie powłoki walcowe. Teoria ta zakładała, że przekrój poprzeczny pręta pod wpływem działania obciążenia nie zmienia swojego kształtu. Na podstawie tego założenia można zapisać: $\varepsilon_s(x, s, n) = 0$, a zatem odkształcenie obwodowe jest równe zero. Ponadto, teoria zakłada się, że odkształcenie postaciowe na powierzchni środkowej ścianek przekroju jest równe zero, $\gamma_{xs}(x, s, n) = 0$. Teoria Własowa pozwala na analizę odkształceń i naprężeń w konstrukcjach cienkościennych, jednocześnie uwzględniając utratę stateczności tej struktury. Jednakże należy zwrócić uwagę na fakt, że teoria Własowa jest uproszczonym modelem i przy analizie konstrukcji o nietypowych przekrojach jej wyniki mogą być niemiarodajne.

Pomijając wyrazy wyższego rzędu przemieszczenie dowolnego punktu przekroju poprzecznego słupa (rys. 3.2.) przyjmują postać:

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= v(x) - (y - y_s)(1 - \cos\psi) - (z - z_s)\sin\psi \\ &\cong v(x) - (z - z_s)\psi - \frac{1}{2}(y - y_s)\psi^2 \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} W(x, y, z) &= w(x) + (y - y_s)\sin\psi - (z - z_s)(1 - \cos\psi) \\ &\cong w(x) + (y - y_s)\psi - \frac{1}{2}(z - z_s)\psi^2 \end{aligned} \quad (39)$$

gdzie: $v(x), w(x)$ – przemieszczenia bieguna głównego S wzdłuż osi y, z ,

$\psi(x)$ – kąt obrotu przekroju poprzecznego belki względem osi x ,

$y = y(s), z = z(s)$ – współrzędne dowolnego punktu w przekroju poprzecznym słupa.

Natomiast przemieszczenia dowolnego punktu, który leży na powierzchni środkowej słupa w kierunku prostym $W_S(x, s)$ oraz w kierunku stycznym $V_S(x, s)$ wyraża się za pomocą następujących formuł matematycznych:

$$V_S(x, s) = W(x, y, z) \frac{dy}{ds} + W(x, y, z) \frac{dz}{ds} \quad (40)$$

$$W_S(x, s) = -V(x, y, z) \frac{dz}{ds} + W(x, y, z) \frac{dy}{ds} \quad (41)$$

Jak wcześniej zostało wspomniane odkształcenia postaciowe na powierzchni środkowej ścianek przekroju są równe zero, stąd wynika warunek:

$$\gamma_{xs} = \frac{dU}{ds} + \frac{dV_S}{dx} + \frac{dV_S}{dx} \frac{dW_S}{ds} + \frac{dW_S}{dx} \frac{dW_S}{ds} = 0 \quad (42)$$

Na podstawie powyższych zależności oraz po scałkowaniu ich względem współrzędnej s otrzymuje się związek:

$$U(x, y, z) = u(x) - y \left(\frac{dv}{dx} \cos\psi + \frac{dw}{dx} \sin\psi \right) - z \left(\frac{dw}{dx} \cos\psi - \frac{dv}{dx} \sin\psi \right) - \omega \frac{d\psi}{dx} \quad (43)$$

$$\cong u(x) - y \frac{dv}{dx} - z \frac{dw}{dx} - \omega \frac{d\psi}{dx} + z\psi \frac{dv}{dx} - y\psi \frac{dw}{dx}$$

gdzie $u = u(x)$ jest stałą całkowania, a $v = v(x)$ i $w = w(x)$ to przemieszczenie bieguna głównego. Biorąc pod uwagę klasyczne nieliniowe związki geometryczne odkształcenie obwodowe ε_x oraz odkształcenia postaciowe γ_{xy} i γ_{xz} można przedstawić za pomocą następujących wyrażeń:

$$\varepsilon_x = \frac{dU}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dV}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dW}{dx} \right)^2 \right] \quad (44)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{dU}{dy} + \frac{dV}{dx} + \frac{dW}{dx} \frac{dW}{dy} \quad (45)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{dU}{dz} + \frac{dW}{dx} + \frac{dV}{dx} \frac{dV}{dz} \quad (46)$$

W przypadku ustrojów cienkościennych wzory (44), (45) i (46) przyjmują następującą postać:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{xl} + \varepsilon_{xn} \quad (47)$$

$$\gamma_{xy} = - \left(z - z_s + \frac{d\omega}{dy} \right) \frac{d\psi}{dx} \quad (48)$$

$$\gamma_{xz} = \left(y - y_s + \frac{d\omega}{dz} \right) \frac{d\psi}{dx} \quad (49)$$

Jeżeli wyrazy wyższego rzędu zostaną pominięte to odkształcenie liniowe ε_{xl} i odkształcenie nieliniowe ε_{xn} zapisuje się za pomocą formuł matematycznych:

$$\varepsilon_{xl} = \frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2} - z \frac{d^2w}{dx^2} - \omega \frac{d^2\psi}{dx^2} \quad (50)$$

$$\varepsilon_{xn} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + [(y - y_s)^2 + (z - z_s)^2] \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 \right\} + \psi \left(z \frac{d^2z}{dx^2} - y \frac{d^2w}{dx^2} \right) + \frac{d\psi}{dx} \left(z_s \frac{dv}{dx} - y_s \frac{dw}{dx} \right) \quad (51)$$

W przypadku ustrojów cienkościennych, które poddane są ścisaniu uogólnioną siłą przekrojową, czyli siłą wzdłużną zapisuje się przy pomocy następującego wzoru:

$$N = EA \frac{du}{dx} \quad (52)$$

Wzór opisujący siłę wzdłużną jest prawdziwy tylko wtedy, gdy układ (x, y, z) jest głównym środkowym układem współrzędnych oraz gdy współrzędna wycinkowa ω spełnia następujące warunki:

$$S_{\omega} = I_{y\omega} = I_{z\omega} = 0 \quad (53)$$

W przeciwnym razie ten wzór przyjąłby znacznie bardziej skomplikowaną postać. Stosując prawo Hooke'a we wzorze (47) tylko dla części liniowej oraz korzystając ze wzoru na siłę wzdłużną, otrzymuje się naprężenia normalne:

$$\sigma_{xl} = \frac{N}{A} \quad (54)$$

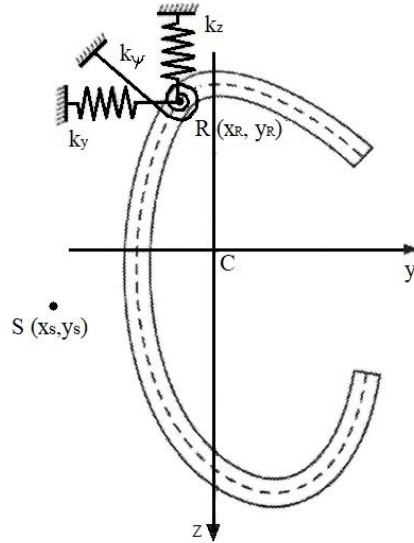
W niniejsze pracy rozważany jest przypadek, w którym siła wzdłużna (osiowa) przyłożona jest w środku ciężkości przekroju poprzecznego cienkościennego słupa. Ponadto zakłada się, że miejsce przyłożenia siły jest odpowiednie wzmocnienie, dzięki temu zapewnione jest spełnienie jednego z założeń teorii Własowa, które dotyczy niezmienności kształtu przekroju poprzecznego. Równania równowagi sprężystego ustroju cienkościennego wyznaczyć można z zasady minimum całkowitej energii potencjalnej:

$$\delta(U_{\varepsilon} - W) = 0 \quad (55)$$

gdzie: U_{ε} – energia odkształcenia sprężystego,

W – praca obciążenia.

Zatem żeby zastosować zasadę minimum całkowitej energii potencjalnej konieczne jest sformułowanie energii odkształcenia sprężystego oraz pracy obciążenia. Energia odkształcenia sprężystego to energia potencjalna nagromadzona w ciele sprężystym przy odkształceniu wywołanym obciążeniem. Po odciążeniu ciała i jego powrocie do stanu wejściowego energia ta zostaje zwrócona. Natomiast praca obciążenia to praca, którą wykonało ciało na skutek działania tego obciążenia. W celu wyprowadzenia odpowiednich zależności przyjęto model słupa przegubowo podpartego na obu końcach oraz sprężyscie utwierdzonego wzdłuż osi przechodzącej przez punkt $R(y_R, z_R)$, co pokazano na rysunku 3.2.



Rysunek 3.2. Model przegubowo podpartego ustroju cienkościennego utwardzonego sprężystości wzdłuż osi przechodzącej przez punkt R [66]

Energję odkształcenia sprężystego wyraża się wzorem:

$$U_{\varepsilon} = U_{\varepsilon l} + U_{\varepsilon n} \quad (56)$$

gdzie: $U_{\varepsilon l}$ – część liniowa energii odkształcenia sprężystego,

$U_{\varepsilon n}$ – część nieliniowa energii odkształcenia sprężystego.

$$U_{\varepsilon l} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (\sigma_{x1} \varepsilon_{x1} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dA dx + \frac{1}{2} \int_0^L k_y v_R^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L k_z w_R^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L k_{\psi} \psi^2 dx \quad (57)$$

$$U_{\varepsilon n} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (2\sigma_{x1} \varepsilon_{xn} + \sigma_{xn} \varepsilon_{xn}) dA dx \cong \int_0^L \int_A \sigma_{x1} \varepsilon_{xn} dA dx \quad (58)$$

gdzie: k_y, k_z, k_{ψ} – współczynniki sztywności z uwagi na przemieszczenia w kierunku osi y i z oraz obrotu względem osi x.

Jak wcześniej zostało wspomniane, uogólniona siła wewnętrzna w analizowanym przypadku to siła wzdłużna (ściskająca), wyraża się następującym wzorem:

$$N = \int_A \sigma_{x1} dA \quad (59)$$

Liniowy składnik energii potencjalnej można zapisać za pomocą wzoru:

$$U_{el} = \frac{1}{2} E \int_0^L \left[A \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + I_z \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 + 2I_{yz} \frac{d^2v}{dx^2} \frac{d^2w}{dx^2} + I_y \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 + I_\omega \left(\frac{d^2\psi}{dx^2} \right)^2 \right] dx \quad (60)$$

$$+ \frac{1}{2} GI_S \int_0^L \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L k_y v_R^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L k_z w_R^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L k_\psi \psi^2 dx$$

Natomiast nieliniowy składnik energii potencjalnej zapisuje się przy pomocy formuły matematycznej:

$$U_{en} = \frac{1}{2} \int_0^L N \left[\left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (61)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^L r_s^2 N \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx + \int_0^L N \left[z_s \frac{dv}{dx} - y_s \frac{dw}{dx} \right] \frac{d\psi}{dx} dx$$

gdzie: r_s – biegunowy promień bezwładności względem środka ścinania i wyraża się wzorem:

$$r_s^2 = y_s^2 + z_s^2 + \frac{I_y + I_z}{A} = \frac{I_p}{A} \quad (62)$$

Drugim składnikiem koniecznym do zastosowania zasady minimum całkowitej energii potencjalnej jest praca obciążenia, którą przedstawia się następująco:

$$W = \int_0^L (-q_x u) dx + (Nu)|_0^L \quad (63)$$

Wyznaczone związki na energię odkształcenia sprężystego i pracę obciążenia wstawiono do zasady minimum całkowitej energii potencjalnej i otrzymano układ równań:

$$EA \frac{d^2u}{dx^2} = -q_x \quad (64)$$

$$EI_z \frac{d^4v}{dx^4} + EI_{yz} \frac{d^4w}{dx^4} - \frac{d}{dx} \left(N \frac{dv}{dx} \right) - z_s \frac{d}{dx} \left(N \frac{d\psi}{dx} \right) + k_y v_R = 0 \quad (65)$$

$$EI_y \frac{d^4w}{dx^4} + EI_{yz} \frac{d^4v}{dx^4} - \frac{d}{dx} \left(N \frac{dw}{dx} \right) + y_s \frac{d}{dx} \left(N \frac{d\psi}{dx} \right) + k_z w_R = 0 \quad (66)$$

$$EI_\omega \frac{d^4\psi}{dx^4} - GI_S \frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{d}{dx} \left(Nr_s^2 \frac{d\psi}{dx} \right) - z_s \frac{d}{dx} \left(N \frac{dv}{dx} \right) + y_s \frac{d}{dx} \left(N \frac{dw}{dx} \right) - (z_R - z_s) k_y v_R + \quad (67)$$

$$(y_R - y_s) k_z w_R + k_\psi \psi = 0$$

Przyjmując założenia, że $q_x = 0$, $k_y, k_z, k_\psi = 0$ oraz $I_{yz} = 0$, można zapisać:

$$EA \frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad (68)$$

$$EI_z \frac{d^4v}{dx^4} - N \left(\frac{d^2v}{dx^2} + z_s \frac{d^2\psi}{dx^2} \right) = 0 \quad (69)$$

$$EI_y \frac{d^4w}{dx^4} - N \left(\frac{d^2w}{dx^2} - y_s \frac{d^2\psi}{dx^2} \right) = 0 \quad (70)$$

$$EI_{\omega} \frac{d^4\psi}{dx^4} - GI_s \frac{d^2\psi}{dx^2} - N \left(r_s^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} + z_s \frac{d^2v}{dx^2} - y_s \frac{d^2w}{dx^2} \right) = 0 \quad (71)$$

Równania po scałkowaniu przyjmują formę:

$$EA \frac{du}{dx} = N \quad (72)$$

$$EI_z \frac{d^2v}{dx^2} - N(v + z_s\psi) = 0 \quad (73)$$

$$EI_y \frac{d^2w}{dx^2} - N(w - y_s\psi) = 0 \quad (74)$$

$$EI_{\omega} \frac{d^4\psi}{dx^4} - GI_s \frac{d^2\psi}{dx^2} - N \left(r_s^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} + z_s \frac{d^2v}{dx^2} - y_s \frac{d^2w}{dx^2} \right) = 0 \quad (75)$$

Uwzględniając tylko liniową część zasady minimum energii potencjalnej otrzymano układ równań pierwszego rzędu:

$$EA \frac{du}{dx} = N \quad (76)$$

$$EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = 0 \quad (77)$$

$$EI_y \frac{d^2w}{dx^2} = 0 \quad (78)$$

$$EI_{\omega} \frac{d^4\psi}{dx^4} - GI_s \frac{d^2\psi}{dx^2} = 0 \quad (79)$$

Przyjęto, że:

$$N(x) = -P \quad (80)$$

Projektowanie struktur cienkościennych wymaga, przede wszystkim, uwzględnienia zjawiska utraty stateczności, czyli: wyboczenia ogólnego, miejscowego czy dystorsyjnego. Przeprowadzenie obliczeń które związane są tylko z wytrzymałością tego typu konstrukcji jest niewystarczające i niemiarodajne. Szczególną uwagę należy zwrócić na obciążenia krytyczne, ponieważ są one konieczne do wyznaczenia zakresów obciążeń, w których ta konstrukcja może bezpiecznie pracować. W analizie konstrukcji cienkościennych podstawowym warunkiem wytrzymałościowym jest ich odporność na utratę stateczności.

Wyboczenie ogólne to takie przy którym nie występuje zniekształcenie przekroju poprzecznego słupa. Jeżeli na ustrój cienkościenny działają tylko siły podłużne, czyli siły ściskające, to występuje eulerowskie wyboczenie giętne (*Euler flexural buckling*) lub wyboczenie giętno-skrętne (*Flexural-torsion buckling*). Wyboczenie miejscowe może dotyczyć półki i/lub środka, ponadto charakteryzuje się zniekształceniem przekroju poprzecznego słupa. Wyboczenie dystorsyjne, podobnie jak wyboczenie miejscowe, charakteryzuje się zniekształceniem przekroju

poprzecznego. W obu przypadkach, wyboczenia miejscowego i dystorsyjnego, pojawiają się charakterystyczne półfale, ale w przypadku wyboczenia dystorsyjnego półfale są znacznie dłuższe niż w przypadku wyboczenia miejscowego. W rzeczywistych konstrukcjach najczęściej występują interakcje pomiędzy poszczególnymi postaciami wyboczenia, co jest trudnym zagadnieniem teoretycznym.

Konstrukcje cienkościenne, ze względu na swoje wymiary, a w szczególności grubość blachy, narażone są na uszkodzenia, zwane niedokładnościami lub imperfekcjami. W przypadku ustrojów cienkościennych najczęściej występują: błędy kształtu przekroju poprzecznego, błędy prostoliniowości słupa, naprężenia resztkowe, które pojawiają się w słupach na skutek kształtowania ich na zimno, warunki podparcia czy obciążenia [66]. Występowanie niedokładności w konstrukcjach cienkościennych jest szczególnie niebezpieczne, ponieważ może obniżyć ich wytrzymałość oraz odporność na utratę stateczności. Modele obliczeniowe zawierają jedynie idealne warunki obciążenia oraz podparcia. W związku z tym faktem przy analizie wyników uzyskanych na podstawie tej metody należy zachować próg błędu.

Uproszczony opis modelowania zjawisk związanych z wyboczeniem słupów cienkościennych obejmuje trzy postacie wyboczenia. Nie uwzględnia się interakcji pomiędzy postaciami wyboczenia. Rozwiązanie takiego modelu matematycznego pozwala uzyskać wartości obciążeń krytycznych.

3.4.1. Wyboczenie/stateczność ogólna

Zwicherungie słupa charakteryzuje się jednoczesnym skręceniem oraz przestrzennym zginaniem. Jak wcześniej zostało wspomniane kształt przekroju poprzecznego słupa, przy wyboczeniu ogólnym, nie ulega zniekształceniu. Wartość siły krytycznej maleje wraz ze wzrostem długości półfali wyboczeniowej. W związku z tym faktem to wyboczenie ma większe znaczenie w przypadku słupów o dużym stosunku długości do wymiarów przekroju poprzecznego. Kąty obrotu oraz przemieszczenia dla słupów podpartych swobodnie na obu końcach obciążonych symetrycznie względem środka ciężkości przekroju poprzecznego słupa przedstawia się za pomocą formuły matematycznej:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{w}{w_1} = \frac{\psi}{\psi_1} = \sin \frac{\pi x}{L} \quad (81)$$

Przy obliczaniu siły krytycznej dla wyboczenia ogólnego skorzystano z metody Bubnova-Galerkina. Funkcję (81) oraz układ równań (72), (73), (74) i (75) sprowadzono do jednorodnego układu równań algebraicznych, którego wyznacznik główny określa się wzorem:

$$\det \begin{bmatrix} P - P_z & 0 & 0 \\ 0 & P - P_y & y_S P \\ 0 & y_S P & r_S^2 (P - P_\psi) \end{bmatrix} = 0 \quad (82)$$

Po rozwinięciu powyższego wyznacznika otrzymano równanie:

$$(P - P_z)[r_S^2 (P - P_y)(P - P_\psi) - y_S^2 P^2] = 0 \quad (83)$$

gdzie:

$$P_y = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI_y \quad P_z = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI_z \quad P_\psi = \frac{1}{r_S^2} [GI_S + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI_{\omega\omega}] \quad (84)$$

Rozwiązaniem równania (83) są:

$$P_1 = P_z \quad (85)$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \frac{P_y + P_\psi}{1 - \left(\frac{y_S}{r_S}\right)^2} \left\{ 1 + \sqrt{1 - 4 \frac{P_y P_\psi}{P_y + P_\psi} \left[1 - \left(\frac{y_S}{r_S}\right)^2 \right]} \right\} \quad (86)$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \frac{P_y + P_\psi}{1 - \left(\frac{y_S}{r_S}\right)^2} \left\{ 1 - \sqrt{1 - 4 \frac{P_y P_\psi}{P_y + P_\psi} \left[1 - \left(\frac{y_S}{r_S}\right)^2 \right]} \right\} \quad (87)$$

więc

$$F_{kr} = \min\{P_1, P_2, P_3\} = \min\{P_1, P_3\} \quad (88)$$

3.4.2. Wyboczenie/stateczność dystorsyjna

W półce występują naprężenia normalne:

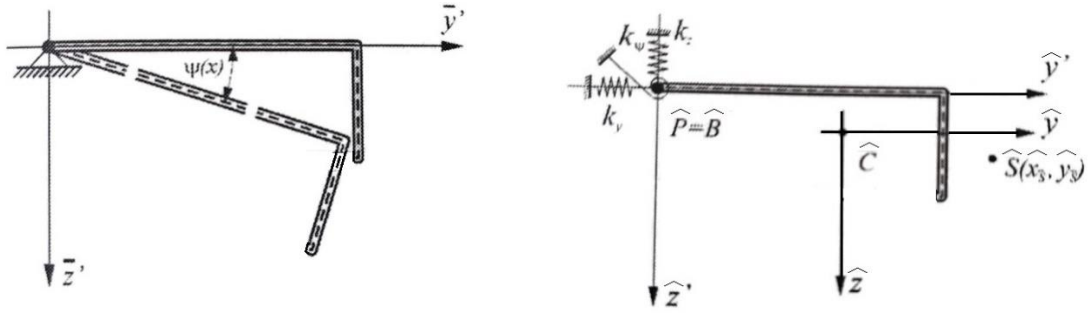
$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{N(x)}{A} \quad (89)$$

Zatem siły wewnętrzne różne od zera występujące w półce to siła normalna, która jest równa:

$$\hat{N} = \int_{\hat{A}} \sigma_x d\hat{A} = \frac{\hat{A}}{A} N \quad (90)$$

gdzie: \hat{A} – pole powierzchni przekroju poprzecznego półki.

Przyjęto założenia upraszczające: $v_p = 0$, $w_p = 0$ i $k_\psi = 0$ oznacza to, że środnik nie ulega deformacji (rysunek 3.3.). Półka traktowana jest jako podparta przegubowo na krawędzi połączenia ze środnikiem.



Rysunek 3.3. Wyboczenie półki przy założeniu, że środek nie ulega deformacji

Stąd:

$$\hat{v} = (\hat{z}_P - \hat{z}_S)\hat{\Psi} \quad (91)$$

$$\hat{w} = -(\hat{y}_P - \hat{y}_S)\hat{\Psi} \quad (92)$$

Energia potencjalna odkształcenia sprężystego składa się ze składnika liniowego i nieliniowego, które wynoszą odpowiednio:

$$\hat{U}_{el} = \frac{1}{2} E \hat{I}_{\hat{\omega}_P} \int_0^L \left(\frac{d^2 \hat{\Psi}}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} G \hat{I}_S \int_0^L \left(\frac{d \hat{\Psi}}{dx} \right)^2 dx \quad (93)$$

$$\hat{U}_{en} = \frac{1}{2} \int_0^L \hat{r}_P^2 \hat{N} \left(\frac{d^2 \hat{\Psi}}{dx^2} \right)^2 dx = -\frac{1}{2} \hat{r}_P^2 \frac{\hat{A}}{A} P \int_0^L \left(\frac{d^2 \hat{\Psi}}{dx^2} \right)^2 dx \quad (94)$$

gdzie:

$$\hat{I}_{\hat{\omega}_P} = \hat{I}_{\hat{\omega}_P} + (\hat{y}_P - \hat{y}_S)^2 \hat{I}_{\hat{y}} - 2(\hat{y}_P - \hat{y}_S)(\hat{z}_P - \hat{z}_S) \hat{I}_{\hat{y}\hat{z}} + (\hat{z}_P - \hat{z}_S)^2 \hat{I}_{\hat{z}}$$

$$\hat{r}_P^2 = \frac{\hat{I}_{\hat{y}} + \hat{I}_{\hat{z}}}{\hat{A}} + \hat{y}_P^2 + \hat{z}_P^2$$

Na podstawie minimum całkowitej energii potencjalnej opisanej wzorem:

$$\delta(\hat{U}_{el} + \hat{U}_{en}) = 0 \quad (95)$$

Jeżeli pod uwagę wzięte zostaną warunki brzegowe w postaci: $\hat{\Psi}(0) = \hat{\Psi}(L) = 0$, a następnie stosując metodę Ritz'a oraz przyjmując kąt obrotu w postaci:

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\Psi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (96)$$

można wyznaczyć obciążenie krytyczne. Na podstawie równania (95) można zapisać:

$$(K_L - K_G) \tilde{\Psi} = 0 \quad (97)$$

gdzie:

$$\tilde{\Psi} = [\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, \dots]^T$$

oraz macierze K_L i K_G to macierze, których elementy obliczamy następująco:

$$[K_L]_{mn} = \frac{\partial^2 \hat{U}_{el}}{\partial \hat{\Psi}_m \partial \hat{\Psi}_n} \quad [K_G]_{mn} = -\frac{\partial^2 \hat{U}_{en}}{\partial \hat{\Psi}_m \partial \hat{\Psi}_n} \quad (98)$$

Są to macierze diagonalne, które można opisać wzorami:

$$[K_L]_{mn} = \frac{\pi^2}{2L} \times \begin{cases} m^2 \left[G\hat{I}_S + m^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 E\hat{I}_{\omega_P} \right] & \text{dla } m = n \\ 0 & \text{dla } m \neq n \end{cases} \quad (99)$$

$$[K_G]_{mn} = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{L} \hat{r}_P^2 \frac{\hat{A}}{A} P \times \begin{cases} m^2 & \text{dla } m = n \\ 0 & \text{dla } m \neq n \end{cases} \quad (100)$$

Rozwiązując równanie:

$$\det(K_L - K_G) = 0 \quad (101)$$

otrzymuje się wór opisujący siłę krytyczną:

$$F_{kr} = \frac{A}{\hat{r}_P^2 \hat{A}} \left[G\hat{I}_S + \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 E\hat{I}_{\omega_P} \right] \quad (102)$$

3.4.3. Wyboczenie/stateczność miejscowa

3.4.3.1. Wyboczenie ścianek

W pierwszej kolejności należy określić model wyboczenia. Wyboczenie miejscowe charakteryzuje się tym, że może objawiać się jako wyboczenie poszczególnych ścianek ustroju cienkościennego. W takim przypadku długość półfali wyboczenia jest porównywalna z wymiarami przekroju poprzecznego słupa. Jeżeli ścianki słupa są prostokątami to można analizować ich utratę stateczności jako wyboczenie płyt prostokątnych. Rozważono dwa przypadki podparcia ścianki:

- ścianki ustroju cienkościennego potraktowane jako płyty prostokątne podparte przegubowo na czterech krawędziach (ścianki przęsłowe),
- ścianki ustroju cienkościennego potraktowane jako płyty prostokątne, które są podparte na trzech krawędziach, a jedna z krawędzi pozostaje swobodna (ścianki wspornikowe).

Siła wewnętrzna i naprężenia wynoszą:

$$N = -P \quad \sigma_x = \frac{N}{A} = -\frac{P}{A} \quad (103)$$

Natomiast naprężenia krytyczne dla płyty prostokątnej można opisać za pomocą wzoru:

$$\sigma_{kr} = \kappa \frac{\pi^2 D}{th^2} = \kappa \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu)} \left(\frac{t}{h} \right)^2 \quad (104)$$

gdzie h jest szerokością płyty. Naprężenia krytyczne wyznacza się z zasady minimum całkowitej energii potencjalnej:

$$\delta(U_{el} + U_{en}) = 0 \quad (105)$$

gdzie:

$$U_{el} = \frac{1}{2} D \int_0^L \int_0^h \left\{ \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} \right)^2 - 2(1 - \mu) \left[\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} - \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial \tilde{y}} \right)^2 \right] \right\} d\tilde{y} dx \quad (106)$$

$$U_{\varepsilon n} = \frac{1}{2} t \int_0^L \int_0^h \left[\sigma_x \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right)^2 \right] d\tilde{y} dx \quad (107)$$

3.4.3.2. Wyboczenie ścianek przęsłowych

Funkcję, która aproksymuje ugięcie ścianki przęsłowej słupa przyjęto w postaci:

$$\tilde{w}(x, \tilde{y}) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi \tilde{y}}{h} \quad (108)$$

$$U_{el} = \frac{1}{2} D \frac{\pi^4}{4Lh} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{\lambda} + n^2 \lambda \right)^2 \quad (109)$$

$$U_{\varepsilon n} = -\frac{1}{2} \kappa D \frac{\pi^4}{4Lh} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^2 m^2 \quad (110)$$

$$\kappa_{kr} = \min_{m,n \in \mathbb{N}} \left(\frac{m}{\lambda} + n^2 \frac{\lambda}{m} \right)^2 = \min_{m \in \mathbb{N}} \left(\frac{m}{\lambda} + \frac{\lambda}{m} \right)^2 \quad (111)$$

Można zatem zauważyć, że:

$$4 \leq \kappa_{kr} \leq 4 + \frac{1}{\lambda^2}$$

Zatem w przypadku dostatecznie długich słupów współczynnik $\kappa_{kr} \cong 4$, czyli naprężenia krytyczne wynoszą:

$$\sigma_{kr} = 4 \frac{\pi^2 E}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{t}{h} \right)^2 \quad (112)$$

Zatem siła krytyczna wyraża się wzorem:

$$F_{kr} = \sigma_{cr} A = \frac{\pi^2 EA}{3(1 - \mu^2)} \left(\frac{t}{h} \right)^2 \quad (113)$$

3.4.3.3. Wyboczenie ścianek wspornikowych (zagięcie brzegowe)

Rozpatrując wyboczenie ścianki wspornikowej można przyjąć funkcję aproksymującą ugięcie płyty w postaci:

$$\tilde{w}(x, \tilde{y}) = \frac{\tilde{y}}{h} \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L} = \tilde{y} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \sin \frac{m\pi x}{L} = \tilde{y} \psi(x) \quad (114)$$

gdzie $\psi(x)$ jest kątem obrotu zagięcia. Energia odkształcenia równa się:

$$U_{el} = \frac{1}{2} \frac{\pi^4 D}{6\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m^2 m^2 \left[\frac{6}{\pi^2} (1 - \mu) + \left(\frac{m}{\lambda} \right)^2 \right] \quad (115)$$

$$U_{en} = -\frac{1}{2} \kappa \frac{\pi^4 D}{6\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m^2 m^2 \quad (116)$$

Stąd

$$\kappa_{cr} = \min_{m \in \mathbb{N}} \left[\frac{6}{\pi^2} (1 - \mu) + \left(\frac{m}{\lambda} \right)^2 \right] = \frac{6}{\pi^2} (1 - \mu) + \frac{1}{\lambda^2} \quad (117)$$

Dla dostatecznie dużych wartości λ wartość $\kappa_{cr} \cong \frac{6}{\pi^2} (1 - \mu)$. Naprężenie krytyczne jest równe:

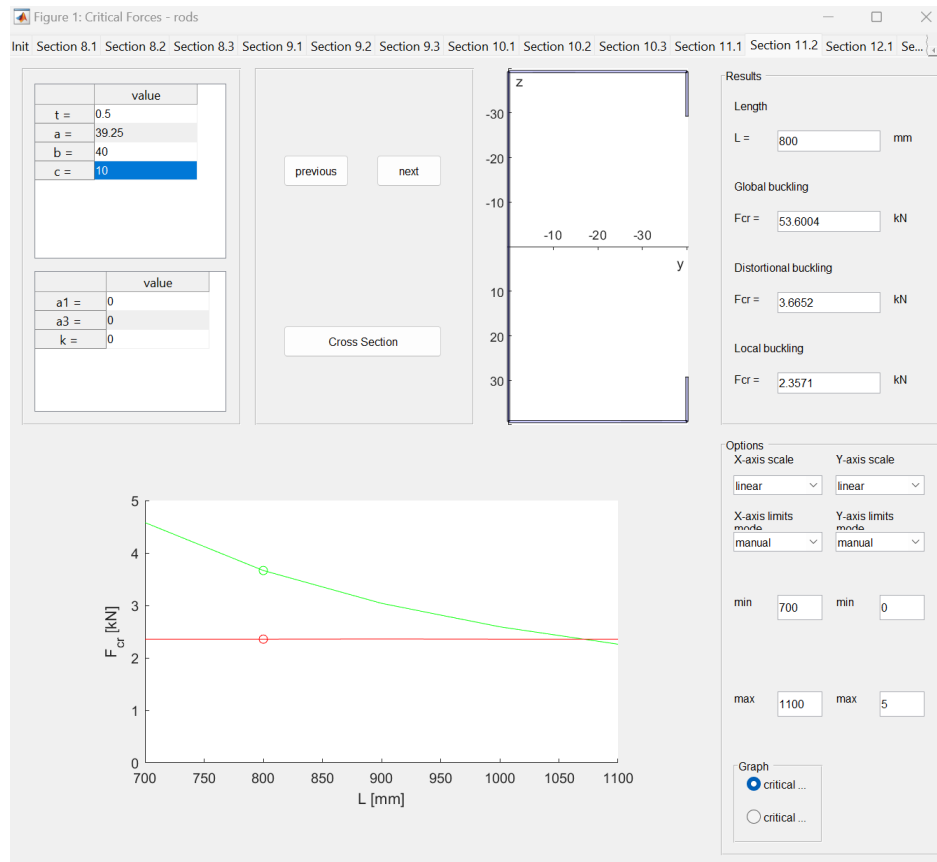
$$\sigma_{cr} = \frac{6}{\pi^2} (1 - \mu) \frac{\pi^2 E}{12(1 - \mu)^2} \left(\frac{t}{h} \right)^2 = \frac{E}{2(1 - \mu)} \left(\frac{t}{h} \right)^2 \quad (118)$$

$$F_{kr} = \frac{EA}{2(1 + \mu)} \left(\frac{t}{h} \right)^2 \quad (119)$$

3.5. Rozwiązanie analityczne - uzyskane wyniki

Powyższe formuły zaimplementowane zostały do programu *Critical Forces Rods GUI*, autorstwa dr Marcina Rodaka, na podstawie którego wyznaczono wartości sił krytycznych, w zależności od postaci wybożenia słupów. Interfejs programu pokazano na rysunku 3.4.

W programie zaimplementowano wartości właściwości materiałowych, które wyznaczono w statycznej próbie rozciągania próbek wyciętych z tego samego materiału, z którego wykonane zostały rzeczywiste słupy. Ponadto program umożliwia wyznaczenie wartości sił krytycznych dla słupów o różnych długościach oraz o różnych wymiarach przekroju poprzecznego.



Rysunek 3.4. Interfejs programu Critical Forces Rods GUI

Na podstawie rozwiązania analitycznego wyznaczono wartości sił krytycznych. Zastosowana metoda pozwala na wyznaczenie sił krytycznych w zależności od postaci wyboczenia słupów. Oznacza to, że uzyskano trzy różne wartości sił krytycznych: dla wyboczenia miejscowego, ogólnego i dystorsyjnego. Badania, które przeprowadzone zostały metodą optyczną pozwoliły na zidentyfikowanie postaci wyboczenia słupów. W związku z tym, jako wynik rozwiązania analitycznego, przyjęto tą wartość siły krytycznej, która koresponduje z postacią wyboczenia uzyskaną na podstawie badań optycznych.

W tabeli 3.6. przedstawiono wartości uzyskanych sił krytycznych w zależności od postaci wyboczenia. Na podstawie badań doświadczalnych (metoda optyczna) określono, że słupy ulegają miejscowej i miejscowo-dystorsyjnej utracie stateczności.

Tabela 3.6. Wartości sił krytycznych uzyskanych na podstawie rozwiązania analitycznego

Postać wyboczenia	Siła krytyczna [kN]		
	Ogólna	Dystorsyjna	Miejscowa
B1	30,11	1,23	2,54
B2	30,69	1,25	10,15
B3	30,71	5,78	13,26
B4	50,06	25,04	4,37
B5	26,33	15,50	4,62
B6	47,87	12,64	18,63
B7	43,59	13,56	17,22

Najwyższą wartość siły krytycznej uzyskano dla słupa B6, co do wartości równej 18,63 kN (wyboczenie miejscowe). Natomiast najniższą wartość siły krytycznej uzyskano dla słupa B1 o wartości 2,54 kN (wyboczenie miejscowe).

4. Badania doświadczalne

Badania doświadczalne są bardzo ważnym narzędziem pracy naukowej. Badania te polegają na wykonaniu, uproszczonego lub zmniejszonego modelu doświadczalnego, który ma odwzorować rzeczywisty układ. Dzięki temu możliwe jest przeprowadzenie oceny właściwości układu w warunkach laboratoryjnych. W badaniach doświadczalnych bardzo ważną rolę odgrywają czynniki takie jak: zastosowana technika pomiarowa, metodyka badań doświadczalnych, ale również walory intelektualne badacza.

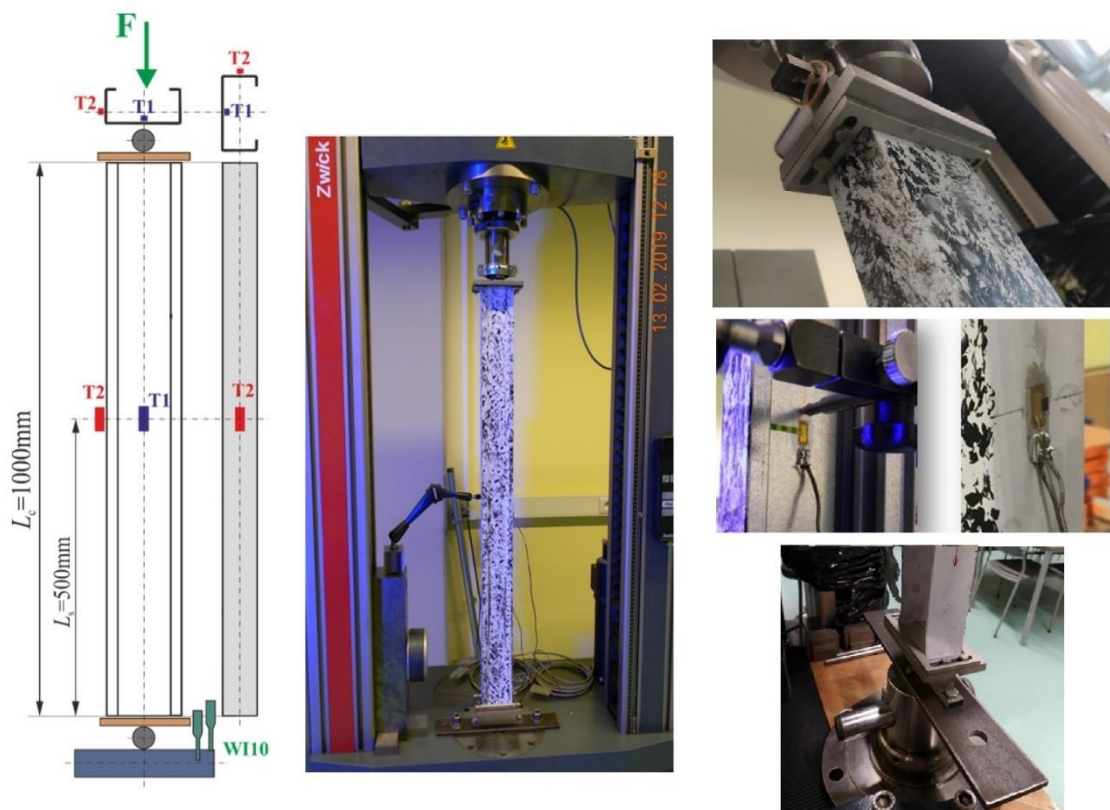
4.1. Metodyka, zastosowana aparatura

Wykonane zostały badania doświadczalne, zastosowano metodę tensometryczną oraz metodę optyczną (system ARAMIS, cyfrowa korelacja obrazu).

Do badań tensometrycznych wykorzystano liniowe, foliowe tensometry rezystancyjne 1-LY11-6/350 wyprodukowane przez firmę HBM o rozmiarze części rezystancyjnej 2,8 mm × 6 mm i stałej tensometru $K = 2,1$. Do każdego słupa przyklejone zostały po dwa tensometry. Jeden został umiejscowiony w połowie długości słupa na środku, a drugi w połowie długości słupa na półce. Punkty, w których naklejono tensometry, to punkty, w których przewiduje się największe odkształcenia. Lokalizacja tensometrów oraz schemat stanowiska badawczego pokazano na rysunku 4.1. Podczas pomiaru rejestrowano: czas pomiaru, siłę ściskającą oraz odkształcenie. Rejestracja dokonywana była metodą komputerową.

Natomiast badania optyczne przeprowadzono przy pomocy systemu ARAMIS. Do pomiarów zastosowane zostały są czujniki do pomiarów dynamicznych współrzędnych 3D, przemieszczeń 3D oraz odkształceń 3D. ARAMIS do pomiarów stosuje system triangulacji, czyli metody pomiaru odległości za pomocą dalmierza optycznego, który składa się ze źródła światła (nadajnika) i odbiornika (obiektywu) o znanym położeniu i nierównoległych osiach optycznych. Słupy zostały pokryte farbą, tak aby powstał na nich czarno-biały deseń (rys. 4.1.). Skaner optyczny 3D wykrywa punkty powstałe na słupach dzięki zastosowaniu dwóch kontrastujących barw (rys. 4.1.). Zastosowany system optyczny wykonuje zdjęcia, które po zmontowaniu tworzą film. Możliwa jest zatem analiza przemieszczeń słupa klatka po klatce. Wykonane zdjęcia zostały poddane analizie w programie GOM Correlate. To oprogramowanie umożliwia pomiar wartości przemieszczeń i odkształceń w konkretnych punktach zeskanowanej konstrukcji. Istnieje także możliwość sprawdzenia największej lub najmniejszej wartości odkształcenia na danym obszarze słupa. Ponadto wartości przemieszczeń pokazane są w postaci gradientu kolorów. Dzięki temu

możemy obserwować oraz z łatwością rozpoznać postacie wybożenia kolumn (miejscową, ogólną i dystorsyjną).



Rysunek 4.1. Schemat stanowiska badawczego oraz widok na przekładki, dzięki którym zadano odpowiednie warunki brzegowe (T1, T2 – lokalizacja tensometrów, W110 – lokalizacja czujnika ugięcia)

Badania tensometryczne oraz optyczne wykonano równocześnie na maszynie wytrzymałościowej ZWICK/Roell Z100 o zakresie pomiarowym od 0,2 kN do 100 kN. Jest to maszyna uniwersalna, na której można przeprowadzać próby ściskania, rozciągania oraz zginania. W celu zabezpieczenia próbek przed niekontrolowanym przesuwem końców słupów, podczas przykładania siły, zastosowano specjalne przekładki. Górna przekładka, do której przykładana była siła ściskająca zablokowała dwie translacje: względem osi y i względem osi z . Przesuw względem osi x był umożliwiony. Zablokowane zostały także trzy obroty, względem wszystkich osi. Natomiast dolna przekładka zablokowała trzy translacje oraz trzy obroty. Zastosowanie takich warunków brzegowych pozwoliło uniknąć skręcenia przekroju poprzecznego, czyli deplanacji.

Siła ściskająca przyłożona została w środku ciężkości przekroji poprzecznych słupów. Badania prowadzone były aż do całkowitej utraty nośności badanych słupów. Celem badań

tensometrycznych było określenie wartości sił krytycznych oraz sił maksymalnych, przy których doszło do całkowitej utraty nośności słupów. Natomiast metoda optyczna, przede wszystkim, posłużyła do identyfikacji postaci wyboczenia, którym uległy słupy na skutek działania osiowej siły ściskającej. Rejestracja odkształceń, wykonana przy pomocy metody tensometrycznej, oraz rejestracja przemieszczeń, wykonana przy pomocy metody optycznej, odbywały się w tym samym czasie. Ponadto oba systemy, tensometryczny oraz optyczny, rejestrowały wartość siły ściskającej. Badania wykonane zostały zgodnie z wytycznymi normy Eurokod 3.

Wyznaczanie wartości siły krytycznej, jest zagadnieniem, które może stwarzać wiele trudności. Paszkiewicz i Kubiak [67] zastosowali metodę tensometryczną oraz system optyczny ARAMIS, w celu określenia obciążenia krytycznego ceowych belek kompozytowych poddanych zginaniu oraz ściskaniu. W tej pracy badacze wyznaczyli wartości sił krytycznych przy pomocy kilku metod: metodą odkształceń średnich, metodą przecięcia prostej linii na wykresie obciążenie-odkształcenie, metodą krzywej punktowej ugięcia oraz metodą Koitera. W niniejszej pracy zastosowano kilka metod wyznaczania wartości siły krytycznej, dzięki temu uzyskane wyniki zostały zweryfikowane.

4.2. Przedmiot badań doświadczalnych

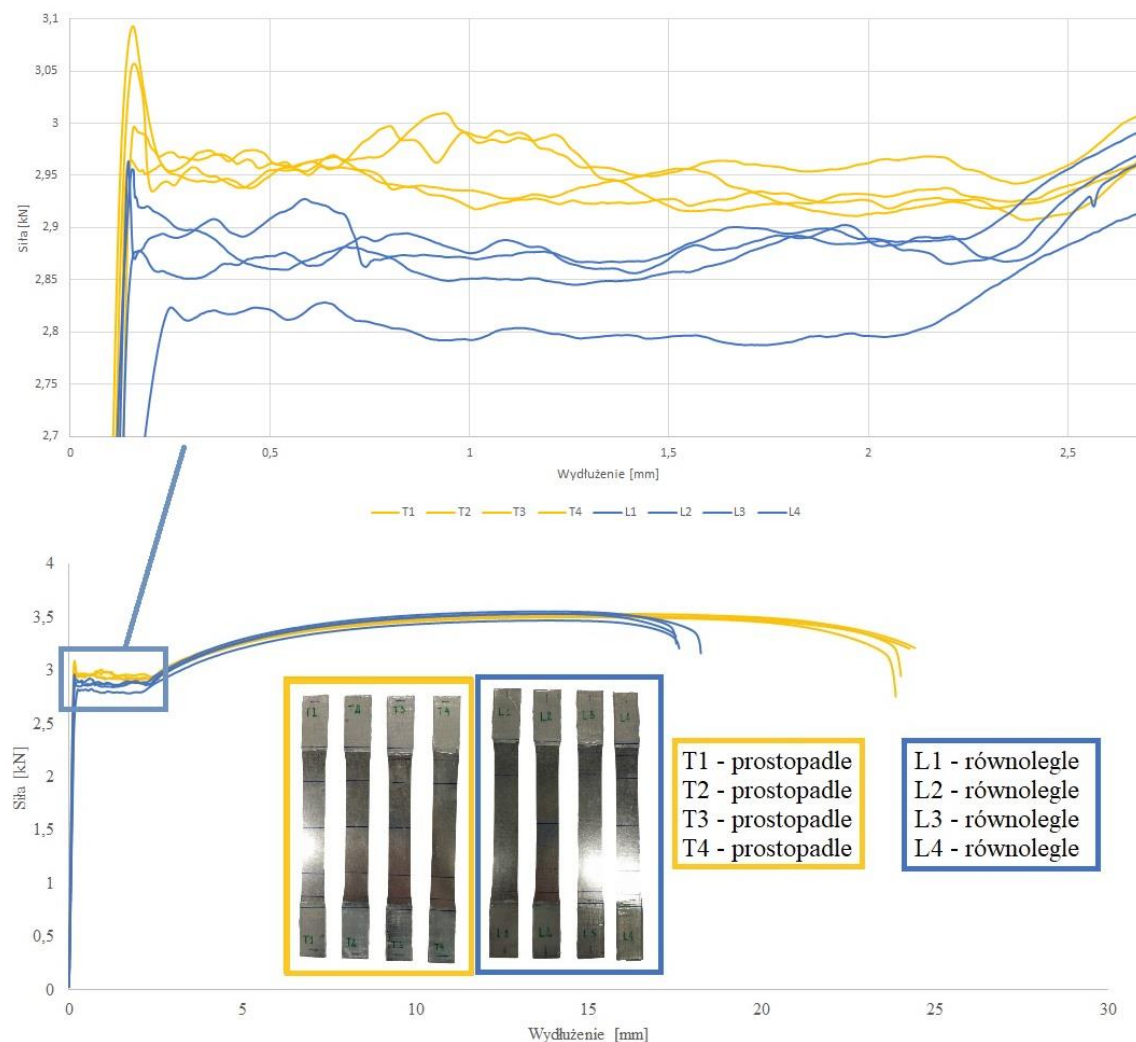
Przedmiotem badań są cienkościennych słupy ceowe o zmodyfikowanych kształtach przekroji poprzecznych. Celem niniejszej pracy jest określenie wpływu modyfikacji kształtu przekrojów poprzecznych słupów na ich wytrzymałość, nośność oraz odporność na utratę stateczności. Słupy posiadały pojedyncze lub podwójne arkusze blachy na półce. Ponadto wykonane zostały bez udziału połączeń rozłącznych i nierozłącznych. Modyfikacji podlegał kształt półki oraz kształt środka. Wymiary zewnętrzne przekroji poprzecznych wszystkich analizowanych słupów to: wysokość $H = 80$ mm oraz szerokość $b = 40$ mm. Całkowita długość słupów, poddanych badaniom doświadczalnym, to 1000 mm. Słupy wykonano z jednego arkusza blachy o grubości $t = 0,5$ mm przy zastosowaniu giętarek ręcznych i/lub półautomatycznych.

Słupy wykonano z blachy ocynkowanej DX51 o grubości powłoki na blachach Z200 – 220 g/m². Stale te charakteryzują się dobrą podatnością na formowanie na zimno. W przypadku małych promieni gięcia ważne jest, o ile to możliwe, aby wykonywać gięcie w kierunku poprzecznym do kierunku walcowania, gdzie podatność na formowanie jest nieco większa niż w kierunku wzdłużnym. Właściwości mechaniczne stali DX51 uzyskano na podstawie statycznej próby rozciągania i zostały przedstawione w tabeli 4.1..

Tabela 4.1. Właściwości mechaniczne stali DX51 uzyskane na podstawie statycznej próby rozciągania

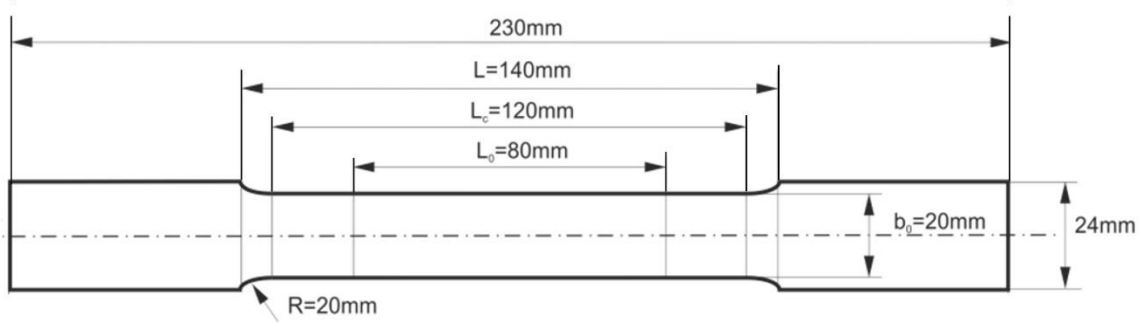
Właściwość	Symbol	Wartość
Moduł Younga	E	181 GPa
Górna granica plastyczności	R_{eH}	330 MPa
Wytrzymałość na rozciąganie	R_m	380 MPa

Na rysunku 4.2. pokazano wykresy siła-wydłużenie, uzyskane na podstawie statycznej próby rozciągania.



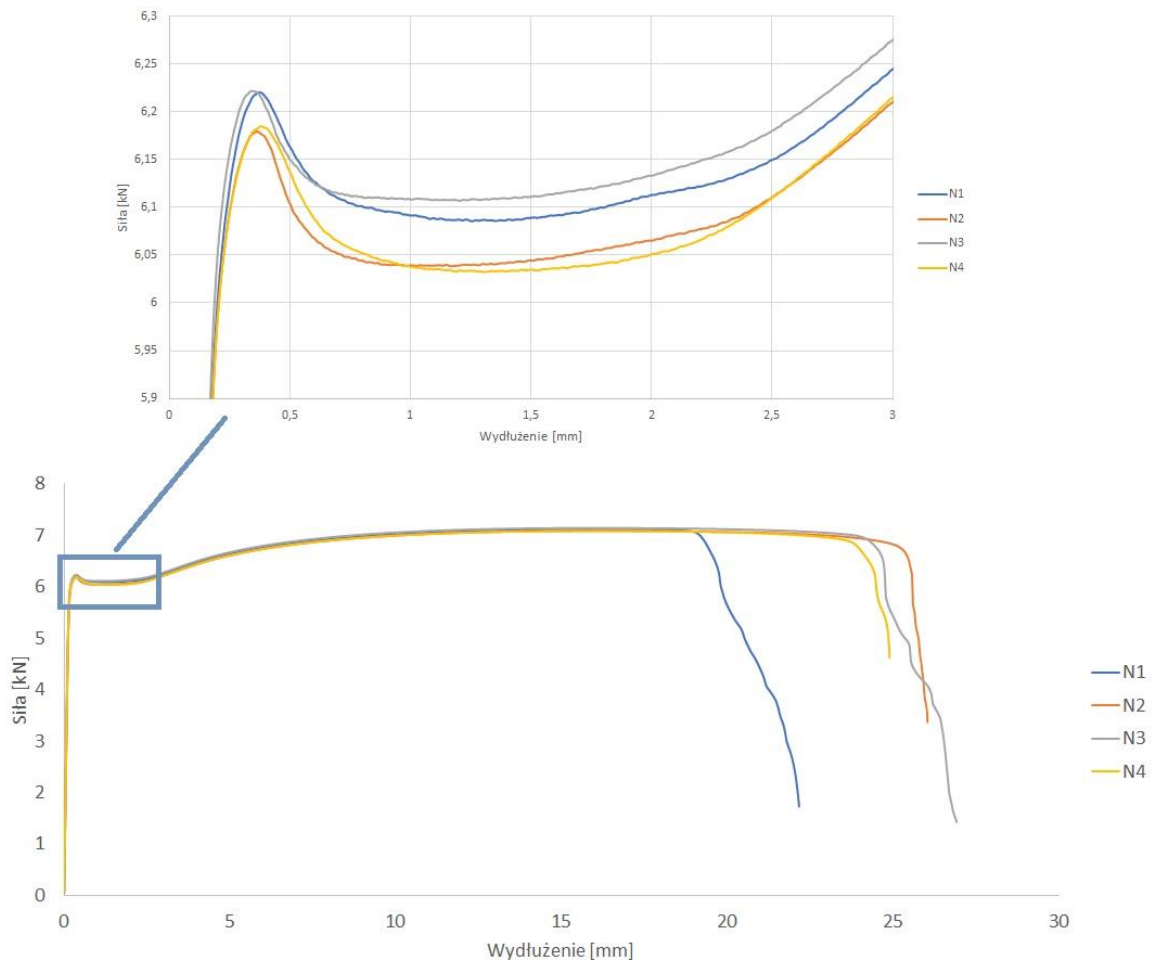
Rysunek 4.2. Wykres rozciągania stali DX51 (próbki płaskie)

Próbki wykonane zostały zgodnie z wytycznymi normy PN-EN ISO 6892-1. Badaniom poddano 8 próbek, w tym 4 wycięto z blachy prostopadłe do kierunku walcowania i 4 wycięto z blachy równoległe do kierunku walcowania (rys. 4.2.). Wymiary próbek, które są zgodne z wyżej wymienioną normą, i przedstawiono je na rysunku 4.3.



Rysunek 4.3. Wymiary próbki płaskiej do statycznej próby rozciągania

Formowanie stali na zimno powoduje zmianę właściwości mechanicznych materiału. W szczególności zagięcia pod kątem 90° mogą powodować umocnienie materiału oraz zmianę właściwości plastycznych stali. W związku z powyższym wykonana została statyczna próba rozciągania naroży, czyli zagięć pod kątem 90° , które wycięte zostały z analizowanych w niniejszej pracy słupów. Na rysunku 4.4. pokazano wykres siły w funkcji wydłużenie próbek (naroży).



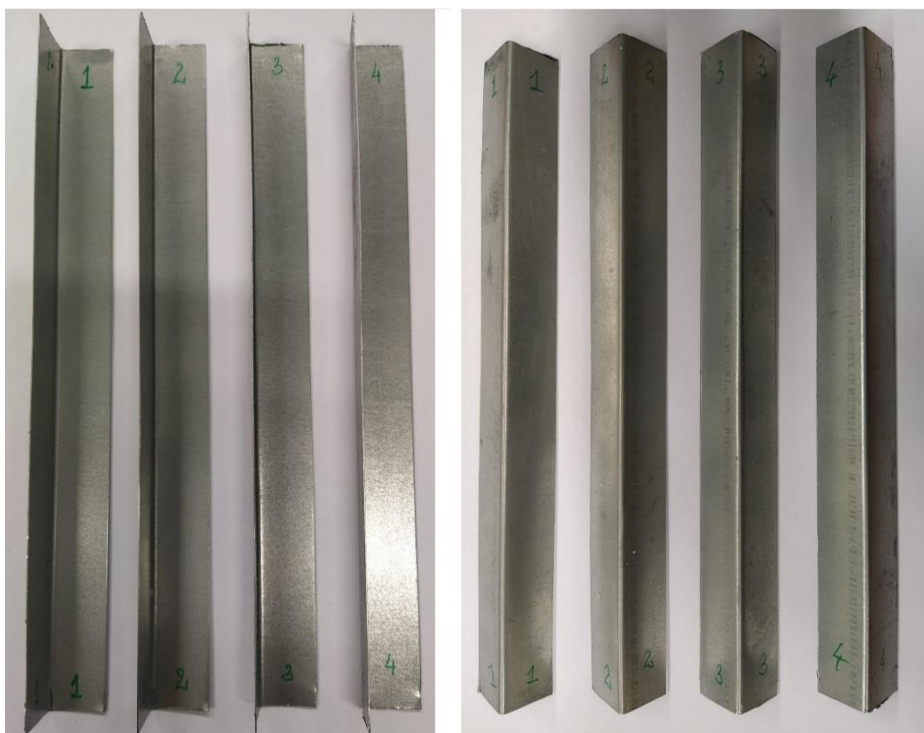
Rysunek 4.4. Wykres rozciągania stali DX51 (naroża)

Na powyższym wykresie można zaobserwować brak wyraźnej granicy plastyczności. W przypadku próbek płaskich wyraźna granica plastyczności występuje. W tabeli 4.2. przedstawiono wyniki uzyskane na podstawie próby rozciągania naroży.

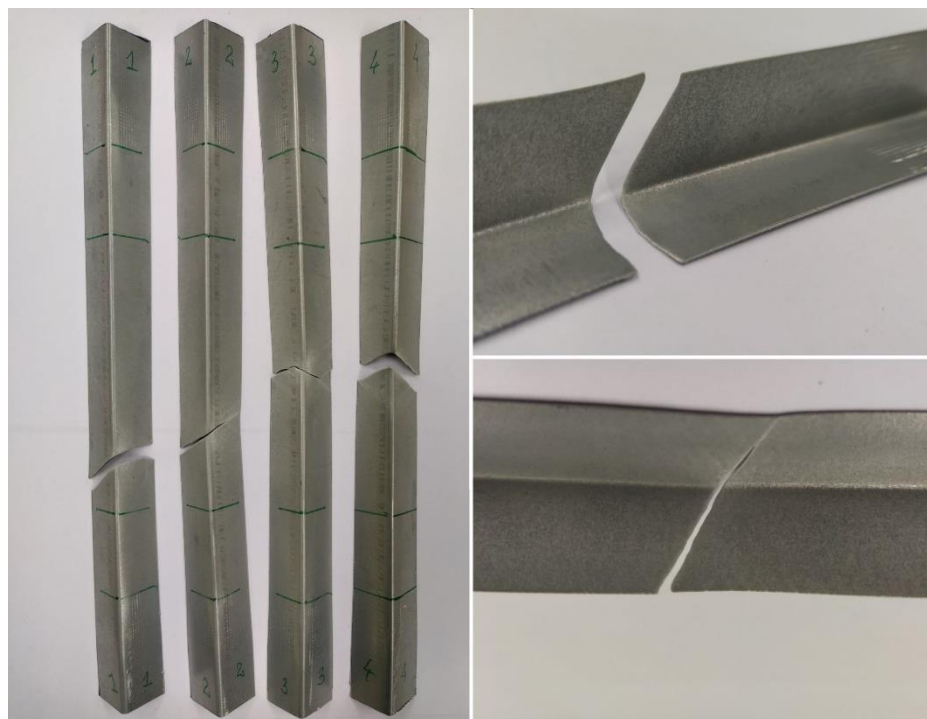
Tabela 4.2. Właściwości mechaniczne stali DX51 uzyskane na podstawie statycznej próby rozciągania

Właściwość	Symbol	Wartość
Moduł Younga	E	186 GPa
Górna granica plastyczność	R_{eH}	330 MPa
Wytrzymałość na rozciąganie	R_m	378 MPa

Moduł Younga dla naroży jest o 6 GPa wyższy niż dla próbek płaskich. Natomiast wytrzymałość na rozciąganie naroży jest o 2 MPa niższa niż dla próbek płaskich. Różnice w wartościach właściwości mechanicznych próbek płaskich i naroży są niewielkie, natomiast charakterystyki wykresów odznaczają się różnymi przebiegami.



(a) Próbki (naroża) przygotowane do statycznej próby rozciągania



(b) *Próbki (naroża) po wykonaniu statycznej próby rozciągania*

Rysunek 4.5. *Próbki przed i po wykonaniu badań*

Na rysunku 4.5. pokazano naroża przygotowane do badań oraz próbki po wykonanych badaniach. Zniszczone próbki posiadają charakterystyczne dla odkształcenia plastycznego ścieżca pod kątem 45°.

4.3. Metoda tensometryczna

Metoda tensometryczna jest jedną z najczęściej stosowanych sposobów doświadczalnych, służących do pomiaru odkształceń na powierzchni konstrukcji. Na podstawie uzyskanych wyników określić można naprężenia w konstrukcji, a zatem również wytrzymałość konstrukcji.

Tensometry są przyrządami pozwalającymi na pomiar odkształceń. Rozróżniamy tensometry mechanicznej, optyczne, elektryczne, pneumatyczne, hydrauliczne i strunowe. Obecnie najczęściej stosowane są tensometry elektryczne, ponieważ cechuje je duża dokładność oraz możliwość pomiaru bardzo małych odkształceń. Tensometry umożliwiają pomiar odkształceń w wielu punktach konstrukcji jednocześnie.

Metoda tensometryczna pozwala na pomiar odkształceń, w wybranych punktach konstrukcji, niezależnie od jej gabarytów czy kształtu. Zatem możliwy jest pomiar odkształceń nawet na bardzo cienkich powierzchniach. Tensometry oraz czujniki ugięcia znajdują zastosowanie przy badaniu zachowania wyboczeniowego oraz przy określaniu maksymalnej wytrzymałości

formowanych na zimno słupów ceowych, co zostało opisane w pracy Nguyena i in. [68]. Ponadto metody tensometryczne umożliwiają analizę zachowania przedwyboczeniowego i powyboczeniowego, o czym w swoich pracach piszą Fratamico i in. [69] oraz Ziółkowski i Imiełowski [70]. Przedmiotem badań w pracy Paczosa i Wasilewicz [71] były cienkościenne belki, formowane na zimno o niesymetrycznym, dwuteowym przekroju poprzecznym. Belki te poddane były czystemu zginaniu. Badania wykazały, że rozwój odkształceń w cienkościennych belkach kształtowanych na zimno powoduje ich wyboczenie miejscowe, a to może prowadzić do obniżenia nośności. Konstrukcje cienkościenne są szczególnie narażone na miejscową utratę stateczności, co zostało wykazane w pracy [72].

Wyniki uzyskane na podstawie badań doświadczalnych, z zastosowaniem metody tensometrycznej, mogą służyć do walidacji wyników uzyskanych na podstawie procedur obliczeniowych przedstawionych w międzynarodowych normach projektowych. W pracy Craveiro i in. [73] opisano badania doświadczalne, które dotyczyły zachowania wyboczeniowego stalowych słupów ceowych, wykonanych w technologii formowania na zimno. Autorzy do badań zastosowali metodę tensometryczną. Wyniki tych badań posłużyły do weryfikacji wyników uzyskanych na podstawie procedur obliczeniowych zawartych w normach projektowych: europejskiej i amerykańskiej. Natomiast Ren i in. [74] zastosowali metodę tensometryczną do walidacji wyników obliczeń uzyskanych na podstawie procedur pochodzących z norm: japońskiej, amerykańskiej, chińskiej, brytyjskiej oraz europejskiej. W tej pracy przedmiotem badań były cienkościenne słupy stalowe o okrągłym i kwadratowym przekroju poprzecznym. Słupy wypełnione były piaskobetonem. Celem przeprowadzenia tych badań było określenie wpływu grubości ścianki kształtownika, wymiaru i kształtu przekroju poprzecznego oraz betonowego wypełnienia na zachowanie się słupa obciążonego osiową siłą ściskającą. W pracy [75] przedstawiono sposoby umożliwiające poprawę wytrzymałości oraz sztywności belek stalowych formowanych na zimno poprzez tworzenie kształtowników o lepszych właściwościach mechanicznych. Przeprowadzono badania tensometryczne, a następnie porównano ich wyniki z wartościami uzyskanymi na podstawie procedur obliczeniowych przedstawionych w normie australijskiej. Adil Dar i in. [76] zastosowali wyniki badań tensometrycznych do weryfikacji obliczeń przeprowadzonych zgodnie z procedurami opisanymi w normie amerykańskiej. W tej pracy przedmiotem badań były wzmocnione słupy, wykonane w technologii formowania na zimno, obciążone osiową siłą ściskającą. Celem tych badań było określenie wytrzymałości słupów, mechanizmów ich zniszczenia oraz stosunku obciążenia osiowego do przemieszczenia słupa. Zastosowanie wyników badań doświadczalnych do walidacji wyników uzyskanych na podstawie procedur obliczeniowych zawartych w normie amerykańskiej opisano również w pracy Chena i in.

[77]. Natomiast w pracy [78] porównano wytrzymałość na ściskanie, stalowych słupów rurowych wypełnionych betonem, uzyskaną na podstawie badań tensometrycznych z wytrzymałością obliczeniową określoną w oparciu o normę amerykańską i europejską. Macdonald i in. [79] przedstawili badania doświadczalne, analizy numeryczne oraz obliczenia wykonane na podstawie procedur zawartych w normie europejskiej i polskiej. Przedmiotem tych badań były cienkościenne, formowane na zimno kształtowniki ceowe. Metoda tensometryczna znajduje swoje liczne zastosowania przy badaniu wytrzymałości oraz odporności na utratę stateczności cienkościennych konstrukcji formowanych na zimno. Ponadto wykazano, że wyniki uzyskane na podstawie tej metody mogą posłużyć do weryfikacji wyników uzyskanych na podstawie procedur obliczeniowych przedstawionych w normach międzynarodowych.

Badania tensometryczne są często stosowane do weryfikacji wyników uzyskanych na podstawie metod numerycznych, takich jak metoda elementów skończonych czy metoda pasm skończonych. Banat i in. [80] przeanalizowali zachowanie wyboczeniowe i powyboczeniowe ściskanych słupów ceowych wykonanych z materiałów kompozytowych. Celem tych badań było określenie obciążenia krytycznego oraz wyznaczenie ścieżek równowagi. Badania doświadczalne posłużyły do weryfikacji wyników uzyskanych na podstawie metody elementów skończonych. Badania tensometryczne zostały również zastosowane do walidacji wyników uzyskanych na podstawie metody elementów skończonych w pracach [81], [82] i [83]. Yao i Guo [84] przedstawili badania tensometryczne cienkościennych ceowników wykonanych w technologii formowania na zimno. Rezultaty tych badań posłużyły do walidacji wyników uzyskanych na podstawie metody wytrzymałości bezpośredniej, która opisana jest w normie amerykańskiej, oraz analiz przeprowadzonych przy pomocy metody elementów skończonych. Badania numeryczne są coraz częściej stosowane przez projektantów i konstruktorów. Jednakże stosowanie tej metody w praktyce wymaga szerokiej wiedzy i doświadczenia, ponieważ model zaimplementowany do programu powinien w jak największym stopniu odwzorowywać rzeczywistą konstrukcję. Dobrą praktyką jest wykonanie badań doświadczalnych, w tym tensometrycznych, które pozwolą na weryfikację modelu zastosowanego do badań numerycznych.

Celem niniejszej pracy jest określenie wpływu modyfikacji kształtu przekroju poprzecznego słupów ceowych na ich wytrzymałość oraz odporność na utratę stateczności. Podobna tematyka podjęta została w pracy [85], gdzie przedmiotem badań były belki o zmodyfikowanym kształcie przekroju poprzecznego, które poddane były czystemu zginaniu. Badania tensometryczne oraz numeryczne wykazały, że modyfikacja kształtu przekroju poprzecznego podwyższa wartość siły krytycznej. Balasubramanin i in. [86] przedstawili badania dotyczące dwuteowników o czterech różnych kształtach przekrojów poprzecznych. Badania

doświadczalne i numeryczne przedstawione w tej pracy wykazały, że siła maksymalna, którą można obciążyć kształtownik, przyjmuje najwyższe wartości dla przekroi o zmodyfikowanym kształcie. Wartości sił krytycznych dla dwóch ceowników połączonych ze sobą środknikami wyznaczyli Manikandan i in. [87]. Celem przeprowadzonych badań było określenie odporności na utratę stateczności takich kształtowników oraz walidacja wyników uzyskanych na podstawie metody numerycznej. Podobna tematyka podjęcia została w pracy [88], jednakże ceowniki, które były przedmiotem badań, posiadały zagięcia na środkniku, których zadaniem było dodatkowe usztywnienie konstrukcji. Ponadto ceowniki posiadały perforację na środkniku. Belki z sinusoidalnie ukształtowanym środknikiem przedstawiono w pracy [89]. Powyższy przegląd literatury wykazał, że metoda tensometryczna jest bardzo często stosowana przy badaniu kształtowników o zmodyfikowanym kształcie przekroju poprzecznego.

Interakcje pomiędzy postaciami wyboczenia ustrojów cienkościennych mogą pozytywnie lub negatywnie wpływać na ich wytrzymałość oraz odporność na utratę stateczności. Young i in. [90] zbadali interakcje pomiędzy różnymi postaciami wyboczenia ściskanych słupów. Badaniom poddano cienkościennie ceowniki z zagięciem brzegowym na półce oraz o różnych wymiarach zewnętrznych przekroju poprzecznego i różnych długościach. Celem pracy było wykazanie, że ściskane słupy ceowe mogą ulegać jednocześnie interakcji pomiędzy wyboczeniami: miejscowym, dystorsyjnym oraz ogólnym. Natomiast Ye i in. [91] przy pomocy metody tensometrycznej oraz z zastosowaniem czujników ugięcia zbadali wpływ interakcji pomiędzy wyboczeniami miejscowym i ogólnym, na zachowanie się ściskanych słupów.

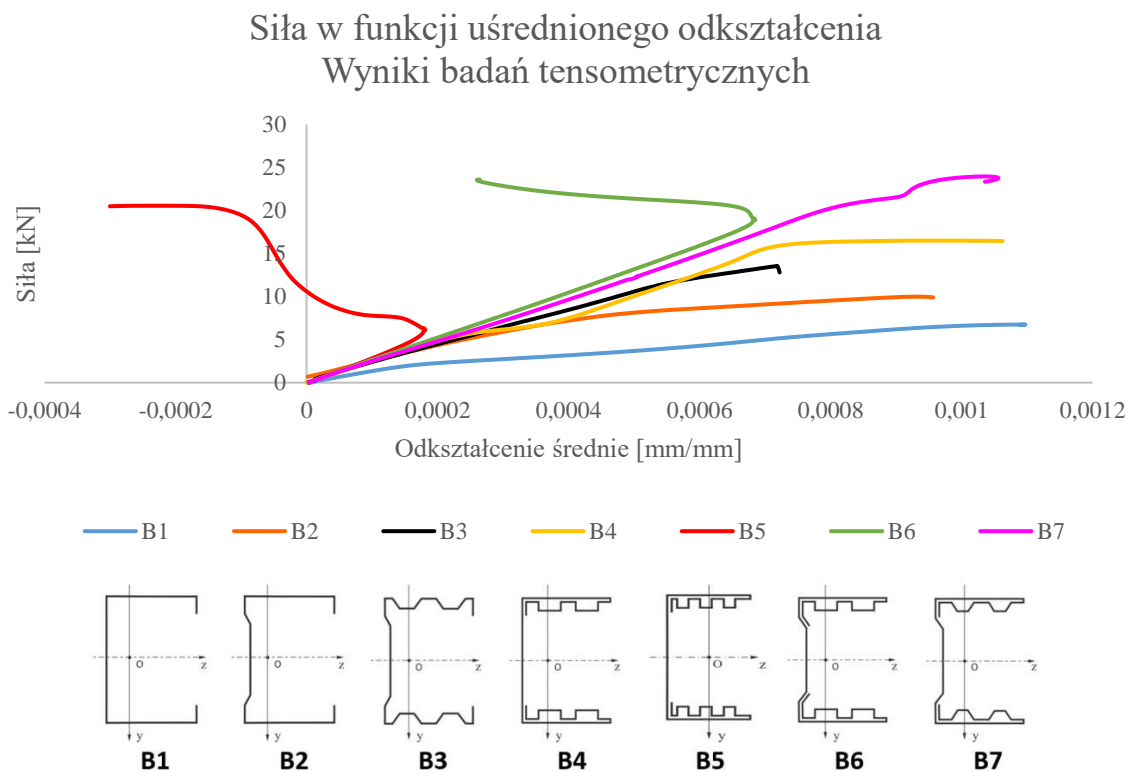
Konstrukcje cienkościennie bardzo często ulegają utracie stateczności przy udziale dwóch lub trzech postaci wyboczenia. Ważne jest doświadczalne sprawdzanie jakim postaciom wyboczenia ulegają ustroje cienkościennie, w czym pomocne mogą być metody optyczne, które opisane zostały w rozdziale 4.4.

4.3.1. Wyniki badań tensometrycznych

Na podstawie badań tensometrycznych określono wartość siły krytycznej oraz wartość siły maksymalnej, przy której doszło do całkowitej utraty nośności słupów. Siłę maksymalną określono jako siłę przy której doszło do zniszczenia kształtownika. Natomiast wartość siły krytycznej określona została przy pomocy metody średniego odkształcenia, metody stycznej pionowej i w niektórych przypadkach, tam gdzie było to możliwe, przy pomocy metody Kotiera.

Na rysunku 4.6. pokazano wykresy siły w funkcji średniego odkształcenia. Wykresy te stanowią rezultat przeprowadzonych badań tensometrycznych. Odkształcenie średnie określono jako średnią arytmetyczną z odkształceń zarejestrowanych przez tensometr znajdujący się na półce

oraz przez tensometr znajdujący się na środku. Natomiast na osi rzędnych znajduje się siła, która odpowiada wartości przyłożonego obciążenia ściskającego.



Rysunek 4.6. Wykresy uzyskane na podstawie badań z zastosowaniem metody tensometrycznej

4.3.1.1. Siła maksymalna

Wartości sił maksymalnych (F_{max}), przy których doszło do całkowitej utraty nośności badanych słupów, uzyskanych na podstawie badań z zastosowaniem metody tensometrycznej, pokazano w tabeli 4.3.

Tabela 4.3. Wartości sił maksymalnych uzyskanych na podstawie badań z zastosowaniem metody tensometrycznej

Słup	F_{max} [kN]
B1	6,75
B2	9,99
B3	13,53
B4	16,50
B5	20,55
B6	23,60
B7	23,96

Najwyższą nośność uzyskano dla słupa B7, dla którego wartość siły maksymalnej wynosi 23,96 kN. Natomiast najniższą nośność odnotowano w przypadku słupa B1 przy sile maksymalnej równej 6,75 kN. Warto zauważyć, że wartości uzyskane dla słupa B6 i B7 są do siebie zbliżone, słupy te posiadają półki wykonane z podwójnego arkusza blachy, gdzie arkusze zewnętrzne są płaskie, a arkusze wewnętrzne są ukształtowane w „skrzynki” lub trapezy. Ponadto słupy te posiadają zagięcia na środku.



Rysunek 4.7. Formy zniszczenia ściskanych słupów

Dominującą formą zniszczenia było uszkodzenie, w postaci odkształcenia plastycznego, w połowie długości słupa, co pokazano na rysunku 4.7.

4.3.1.2. Siła krytyczna

Wartości sił krytycznych określone zostały przy pomocy trzech różnych metod. Pierwszą z nich była metoda uśrednionego odkształcenia, zwana również metodą średniego odkształcenia. Metoda ta polega na podziale wykresu siła-odkształcenie na stan przedwyboczeniowy i stan powyboczeniowy. Stany te, przedstawione jako fragmenty wykresu, należy przybliżyć liniowo, a następnie znaleźć punkt przecięcia się tych prostych. Punkt ten nazywamy punktem bifurkacji, a jego współrzędna y-owa wskazuje wartość siły krytycznej.

Drugą zastosowaną metodą jest metoda stycznej, która polega na przybliżeniu liniowym stanu przedwyboczeniowego, czyli tej części wykresu siła-odkształcenie, która jest prostoliniowa.

Natomiast trzecia zastosowana metoda, zwana metodą Kotier'a lub metodą $P - \omega$, wykorzystuje zgodnie z teorią płyt i powłok oraz podejściem energetycznym, zależność, że dla płyty ściskanej siła jest funkcją kwadratową ugięcia ścianki. Zatem stan powyboczeniowy może zostać przybliżony wielomianem drugiego rzędu. W przypadku konstrukcji, w której nie występowały żadne imperfekcje początkowe, minimum paraboli powinno znajdować się na osi obciążenia i powinno odpowiadać obciążeniu krytycznemu. Natomiast w przypadku konstrukcji nieidealnej jako obciążenie krytyczne należy przyjąć minimalną wartość tej funkcji kwadratowej [85].

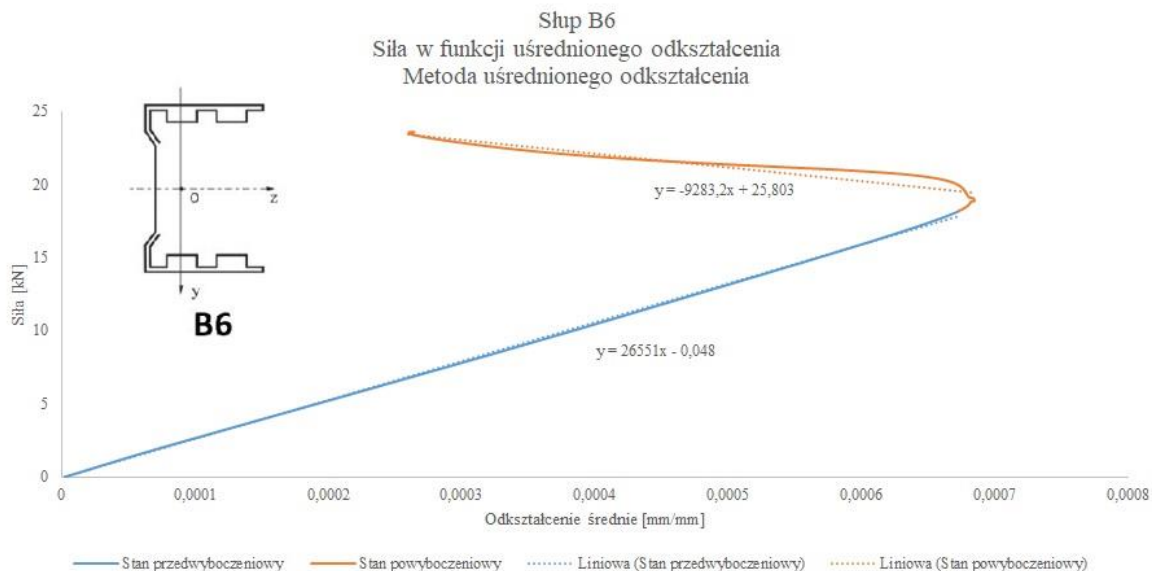
Metoda uśrednionego odkształcenia

Metoda uśrednionego odkształcenia zastosowana została do wyznaczenia siły krytycznej dla wszystkich słupów stanowiących przedmiot badań niniejszej pracy. W tym podrozdziale omówiono zastosowanie tej metody na przykładzie dwóch słupów: B3 oraz B6.



Rysunek 4.8. Zastosowanie metody uśrednionego odkształcenia do wyznaczenia wartości siły krytycznej dla słupa B3

Na rysunku 4.8. przedstawiono zastosowanie metody uśrednionego odkształcenia do wyznaczenia wartości siły krytycznej dla słupa B3, którego kształt przekroju poprzecznego został pokazany na tym rysunku. Stan przedwyboczeniowy oraz stan powyboczeniowy zostały przybliżone liniowo (regresja liniowa). Następnie określono wzory funkcji liniowych, które są reprezentowane przez te proste. Funkcje te utworzyły układ równań na podstawie którego możliwe było wyznaczenie położenia punktu bifurkacji. Współrzędne tego punktu wynoszą: (573,16; 12,02). Oznacza to, że siła krytyczna, co do wartości równa 12,02 kN, występuje przy odkształceniu równym 573,16 $\mu\text{m}/\text{m}$. Natomiast w przypadku słupa B6 (rys. 4.9.) współrzędne punktu przecięcia się przybliżeń liniowych stanu przedwyboczeniowego i stanu powyboczeniowego wynoszą (720,09; 19,11). Zatem siła krytyczna wyznaczona dla słupa B6 wynosi 19,11 kN, przy odkształceniu równym 720,09 $\mu\text{m}/\text{m}$.



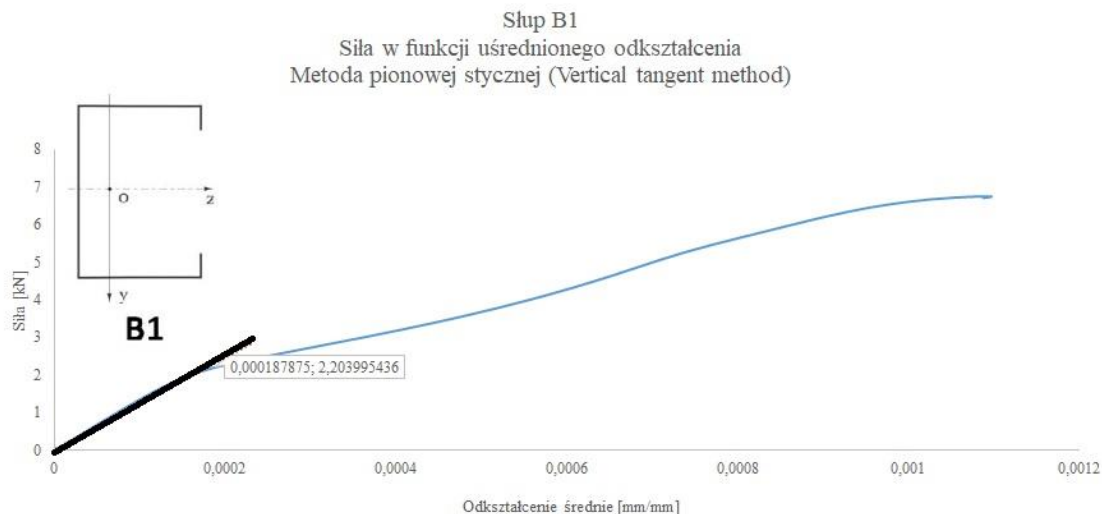
Rysunek 4.9. Zastosowanie metody uśrednionego odkształcenia do wyznaczenia wartości siły krytycznej dla słupa B6

Wartości sił krytycznych dla pozostałych słupów przedstawiono w tabeli 4.4., wraz z zestawieniem wartości tych sił uzyskanych na podstawie pozostałych dwóch metod.

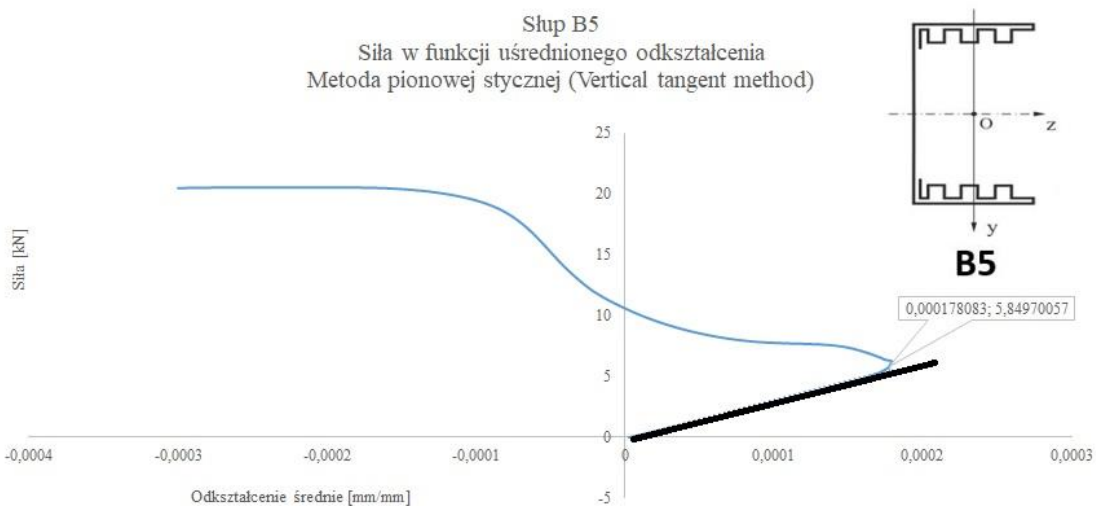
Metoda stycznej

Metoda stycznej zastosowana została do wyznaczenia wartości sił krytycznych dla wszystkich słupów stanowiących przedmiot badań niniejszej pracy. W tym podrozdziale przedstawiono zastosowanie metody stycznej dla słupów: B1 oraz B5.

Na rysunku 4.10. przedstawiono zastosowanie metody stycznej do wyznaczenia wartości siły krytycznej dla słupa B1. Stan przedwyboczeniowy, na wykresie siła-odkształcenie, reprezentowany jest przez prostą, która na rysunku 4.10. została zaznaczona czarnym kolorem. Punkt, w którym czarna prosta przestaje pokrywać się z wykresem funkcji przyjmuje się jako punkt, którego współrzędna y-owa, wskazuje wartość siły krytycznej. W przypadku słupa B1 punkt ten ma współrzędne (187,88; 2,20). Zatem wartość siły krytycznej dla słupa B1 wynosi 2,20 kN przy odkształceniu równym 187,88 $\mu\text{m}/\text{m}$. Natomiast w przypadku słupa B5 (rys. 4.11.) ten punkt ma współrzędne (178,08; 5,85), co oznacza, że wartość siły krytycznej dla słupa B5 wynosi 5,85 kN przy odkształceniu równym 178,98 $\mu\text{m}/\text{m}$.



Rysunek 4.10. Zastosowanie metody stycznej do wyznaczenia wartości siły krytycznej dla słupa B1



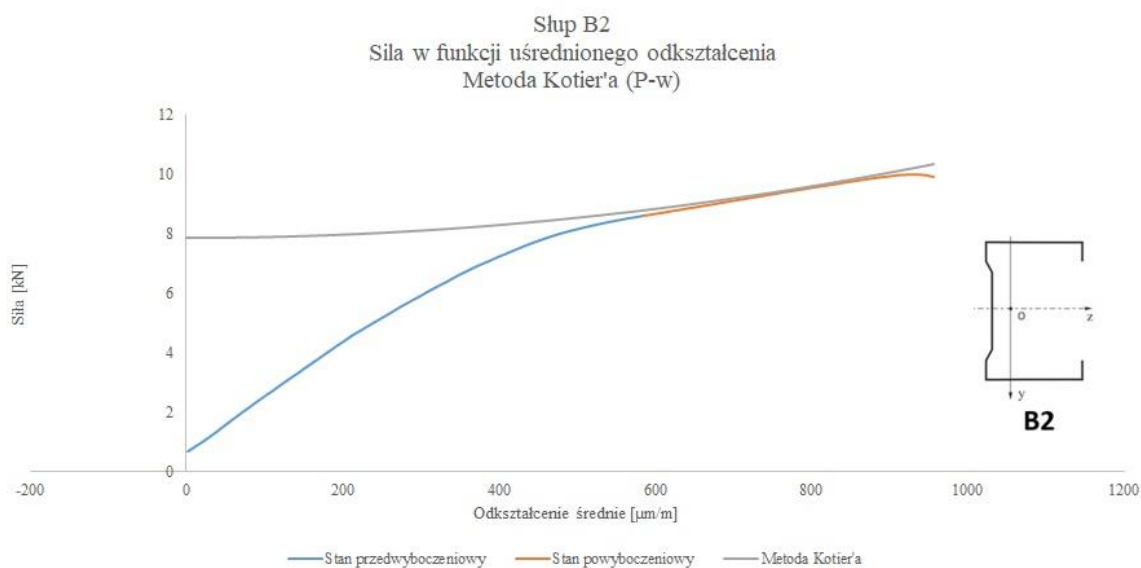
Rysunek 4.11. Zastosowanie metody stycznej do wyznaczenia wartości siły krytycznej dla słupa B5

Wartości sił krytycznych dla pozostałych słupów przedstawiono w tabeli 4.4., wraz z zestawieniem wartości tych sił uzyskanych na podstawie pozostałych dwóch metod.

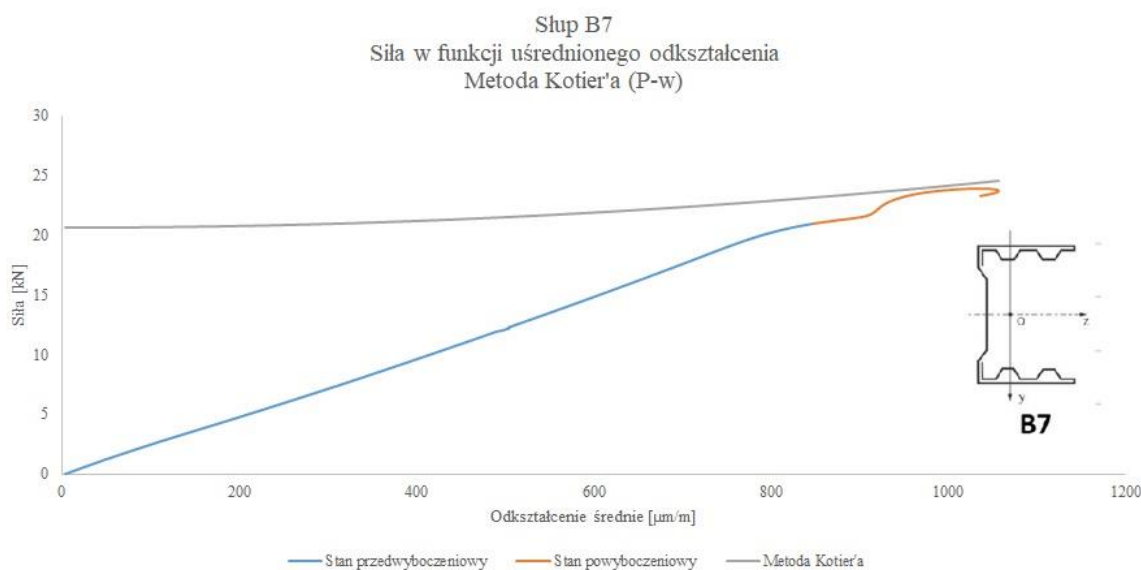
Metoda Kotier'a ($P - \omega$)

Metoda Kotier'a została zastosowana do wyznaczenia wartości sił krytycznych dla słupów B1, B2, B3, B4 oraz B7. W przypadku słupów B5 oraz B6, wyznaczenie wartości siły krytycznej, przy pomocy metody Kotier'a było niemożliwe ze względu na kształt wykresu siła-odkształcenie. Wynikało to z trudności w przybliżeniu stanu powyboczeniowego przy pomocy funkcji

kwadratowej. W niniejszym rozdziale przedstawiono procedurę wyznaczania wartości siły krytycznej metodą Kotier'a dla słupów B2 (rys. 4.12.) oraz B7 (rys. 4.13.).



Rysunek 4.12. Zastosowanie metody Kotier'a do wyznaczenia wartości siły krytycznej dla słupa B2



Rysunek 4.13. Zastosowanie metody Kotier'a do wyznaczenia wartości siły krytycznej dla słupa B7

Wartość siły krytycznej dla słupa B2 wynosi 7,82 kN. Natomiast dla słupa B7 20,65 kN.

Tabela 4.4. Wartości sił krytycznych uzyskane na podstawie badań doświadczalnych

Słup	Siła krytyczna [kN]		
	Metoda uśrednionego odkształcenia	Metoda stycznej	Metoda Kotier'a
B1	2,18	2,20	2,18
B2	8,19	7,84	7,86
B3	12,02	11,91	10,21
B4	5,88	6,01	5,55
B5	5,12	5,85	-
B6	19,11	18,75	-
B7	21,44	20,71	20,65

4.4. Metody optyczne

Doświadczalne badania optyczne pozwalają na pomiar przemieszczeń w konstrukcji w czasie rzeczywistym. Uzyskane wyniki, które często otrzymuje się w postaci zdjęć lub filmów, pozwalają na obserwacje przemieszczeń w konstrukcji także po wykonanych badaniach. Metody optyczne posiadają wiele zalet, m.in. w porównaniu z metodami tensometrycznymi, dają wgląd w przemieszczenie całych słupów, a nie tylko w odkształcenia poszczególnych punktów, w których przyklejone są tensometry. Metody optyczne umożliwiają pomiary statyczne, ale również dynamiczne, co zostało opisane w pracy D'Antimo i in. [92].

Urbaniak i in. [93] zastosowali system ARAMIS do analizy wpływu różnych warunków brzegowych na wartości siły krytycznej oraz na wartości siły przy zniszczeniu kompozytowego słupa. Natomiast Czapski i Kubiak [94] przy pomocy tego samego systemu optycznego zbadali zachowanie wyboczeniowe i powyboczeniowe cienkościennych słupów obciążonych siłą ściskającą. System ARAMIS umożliwia również zbadanie mechanizmu deformacji rdzenia w belce o strukturze sandwichowej [95], ale także struktur o złożonej geometrii, np. struktury kadłuba statku powietrznego, co zostało opisane w pracy Perreta i in. [96]. System ARAMIS wykorzystuje technikę cyfrowej korelacji obrazu, która została zastosowana do pomiaru odkształceń ziaren w rozciąganej próbce wykonanej ze stali o wysokiej wytrzymałości [97] oraz do pomiaru drgań całego samochodu [98]. Powyższe pozycje literaturowe wykazały, że system ARAMIS znajduje swoje zastosowanie w wielu gałęziach przemysłu i nauki.

Do pomiaru odkształceń ustrojów cienkościennych zastosować można również metody geodezyjne, takie jak impulsowy skaner laserowy czy kamerę cyfrową, co zostało opisane w pracy [99]. Jak wcześniej zostało wspomniane, imperfekcje geometryczne mogą wpływać na wytrzymałość oraz na odporność na utratę stateczności ustrojów cienkościennych. Metody optyczne

znajdują swoje zastosowanie również przy ocenie wpływu imperfekcji geometrycznych na wyboczenie cienkościennych powłok cylindrycznych poddanych ścisaniu [100].

Obecnie projektanci i konstruktorzy dążą do wytwarzania kształtowników z cienkich, często poniżej 1 mm grubości, blachy o wysokiej wytrzymałości. Jednakże może to prowadzić do osłabienia wytrzymałości całej konstrukcji. Coraz częściej kształtowniki wzmacnia się poprzez dodatkowe zagięcia na półce lub na śródniku. Każda modyfikacja kształtu przekroju poprzecznego słupa powoduje, że badanie i analiza jego wytrzymałości czy odporności na utratę stateczności staje się bardziej skomplikowana. Należy wspomnieć, że przy analizie konstrukcji cienkościennych konieczne jest sprawdzenie czy nie występują interakcje pomiędzy postaciami wyboczenia, w czym pomocne mogą być metody optyczne. W pracy [101] zastosowano techniki fotogrametryczne do określenia postaci wyboczenia ściskanych słupów ceowych posiadających usztywnienia brzegowe. Ponadto autor dokonał oceny interakcji pomiędzy różnymi postaciami wyboczenia. Natomiast w pracy [102] zastosowano laserowy system pomiarowy do zbadania stateczności i wytrzymałości na ściskanie zimnogiętych kątowników wykonanych ze stali nierdzewnej.

Z powyższych rozważań wynika, że metody optyczne znajdują zastosowanie w różnych gałęziach przemysłu i nauki. Stosowane są do badania stalowych ustrojów cienkościennych, ale również do analizy konstrukcji kompozytowych. Ich podstawową zaletą jest fakt, że dają wgląd w przemieszczenia całej konstrukcji. Najczęściej stosowany jest system ARAMIS, któremu dedykowany jest program GOM Correlate. Jest to program prosty w obsłudze oraz umożliwia użytkownikowi analizę wyników pomiarów.

4.4.1. Wyniki badań optycznych

Na podstawie badań optycznych, z zastosowaniem metody cyfrowej korelacji obrazu, określono postacie wyboczenia słupów. Ponadto uzyskane wyniki umożliwiły określenie wartości sił maksymalnych, przy których doszło do całkowitej utraty nośności słupów. Na rysunku 4.14. pokazano stanowisko badawcze zastosowane do badań optycznych z zastosowaniem systemu ARAMIS.

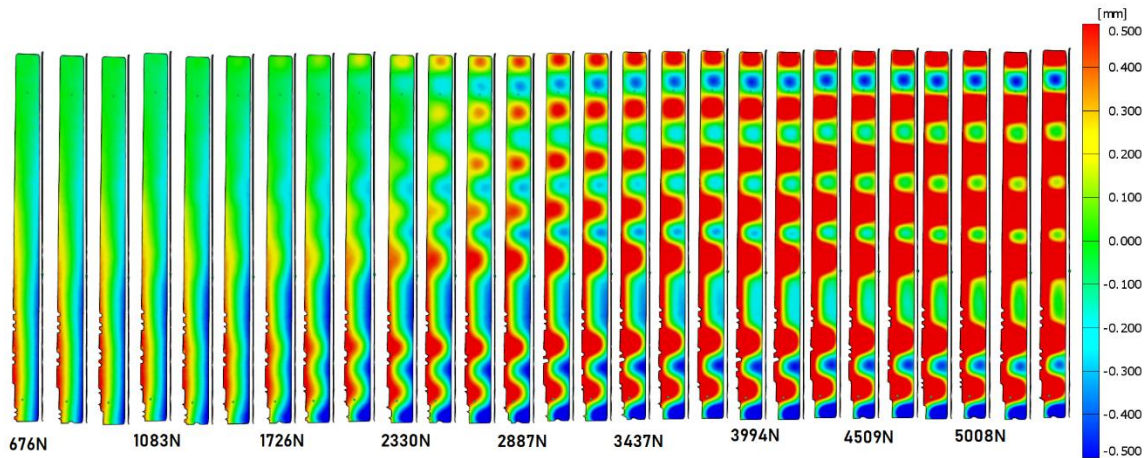


Rysunek 4.14. Stanowisko do badań optycznych (system ARAMIS)

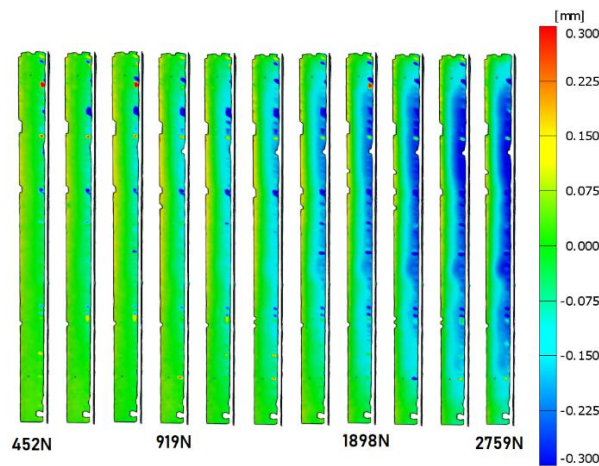
Aparatura, podłączona została w taki sposób, że możliwe było odczytanie wartości siły przy której wystąpiły pierwsze oznaki wybočenja, w związku z tym wyznaczono wartości sił wybočeníowych.

4.4.1.1. Postacie wybożenia słupów

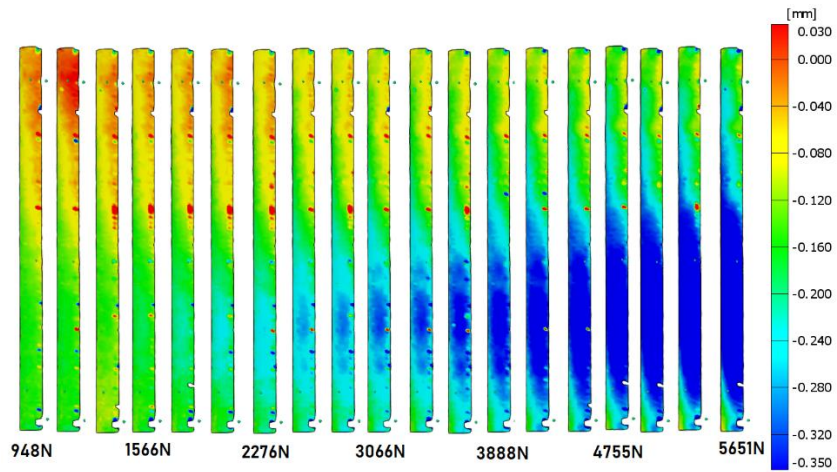
Na rysunku 4.15. przedstawiono formy wybożenia środników ściskanych słupów. Na rysunkach widoczne są wartości siły ściskającej oraz odpowiadające im przemieszczenia. Przemieszczenia przedstawione są za pomocą gradientu kolorów, gdzie kolor czerwony odpowiada maksymalnemu przemieszczeniu, a kolor niebieski minimalnemu przemieszczeniu. Warto jednak zwrócić uwagę na fakt, że minimalne przemieszczenia określane są jako ujemne względem przyjętego układu współrzędnych, co oznacza, że ich wartość bezwzględna może być wyższa od wartości bezwzględnej przemieszczenia maksymalnego.



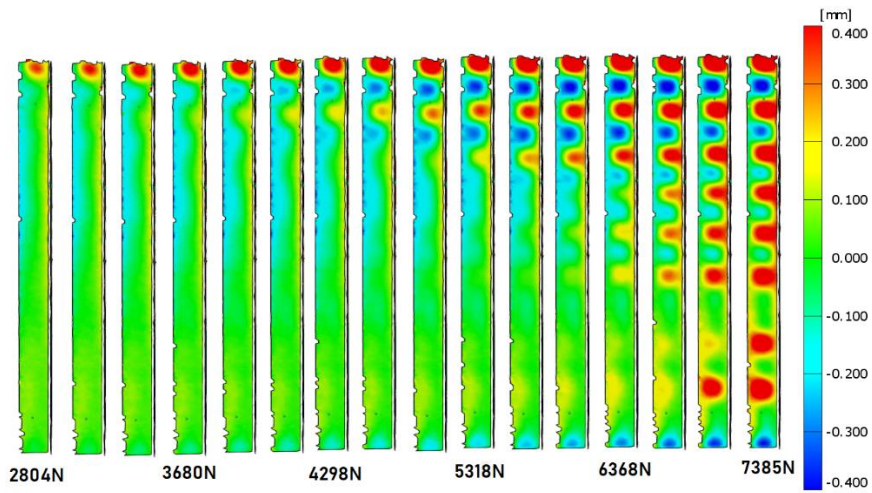
(a) Wybożenie środnika słupa B1



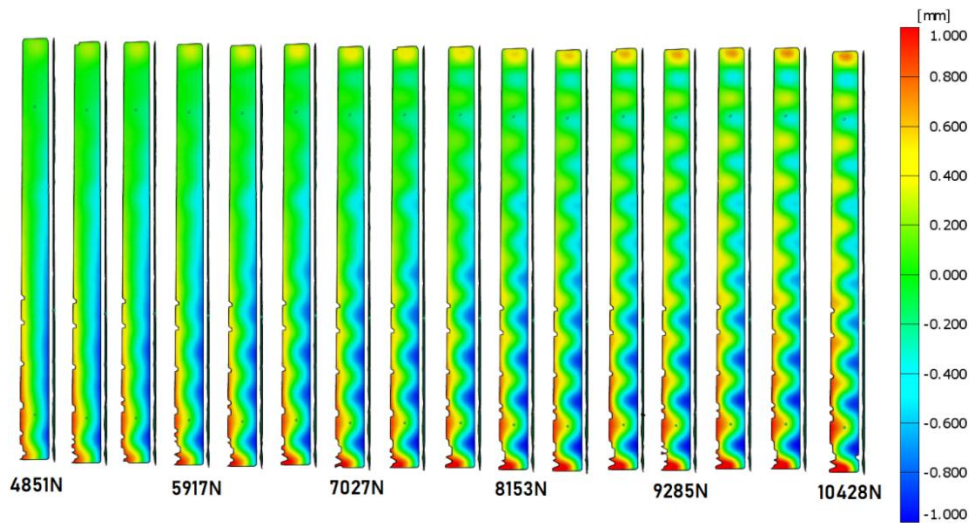
(b) Wybożenie środnika słupa B2



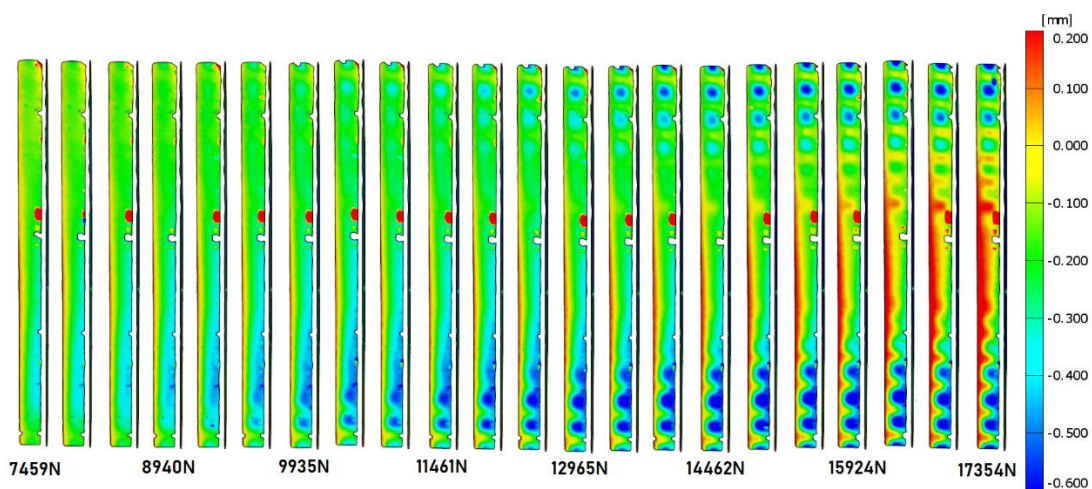
(c) Wyboczenie środnika słupa B3



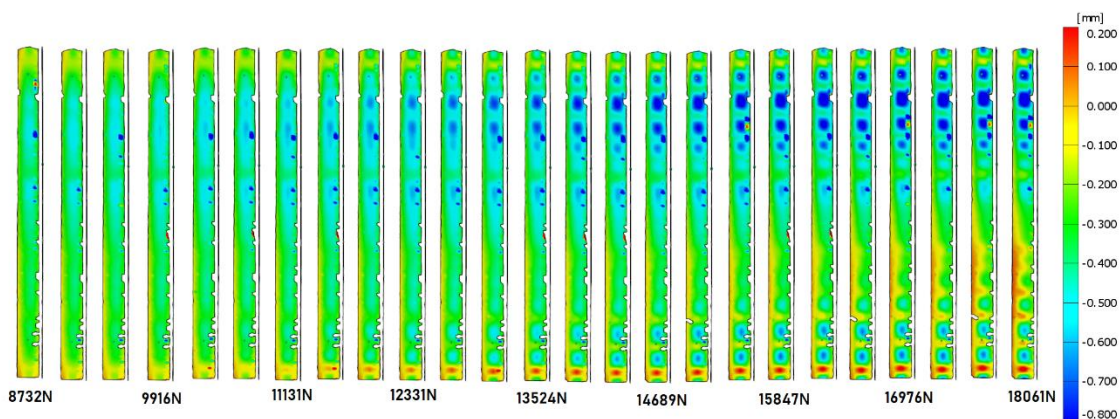
(d) Wyboczenie środnika słupa B4



(e) Wyboczenie środnika słupa B5



(f) Wyboczenie środnika słupa B6

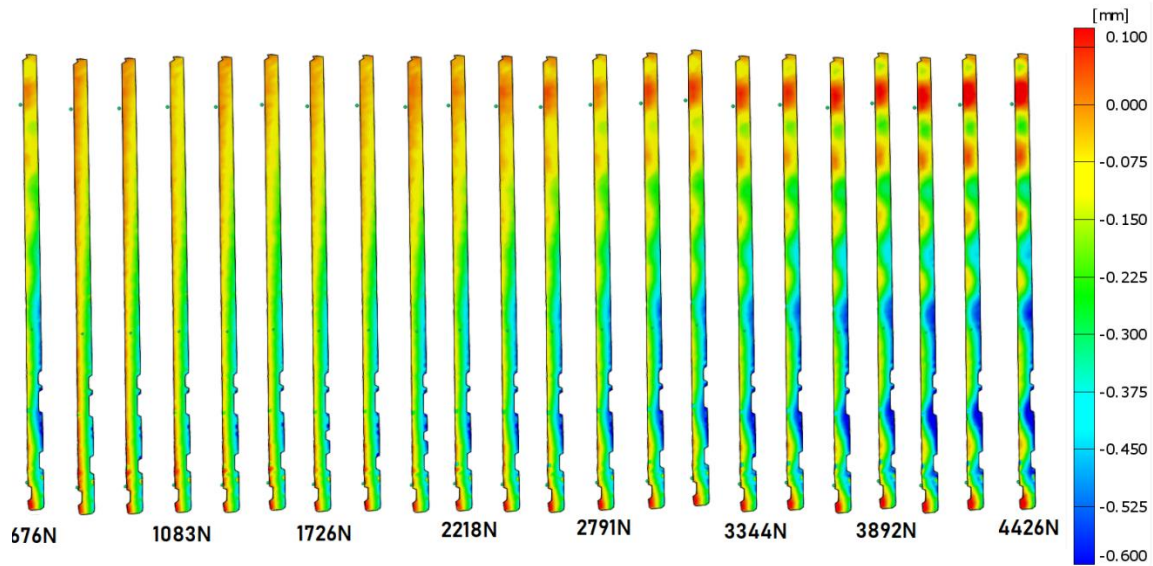


(g) Wyboczenie środnika słupa B7

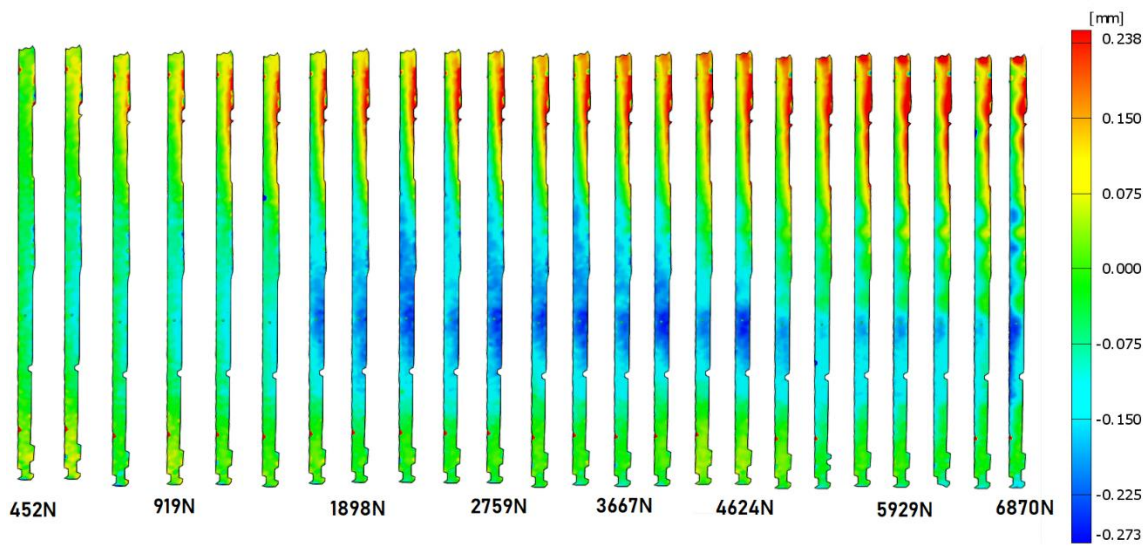
Rysunek 4.15. Postacie wyboczenia środników słupów

Charakterystyczne dla wyboczenia miejscowego półfale wystąpiły na środnikach słupów B1, B4, B5, B6 oraz B7. Natomiast w przypadku słupów B2 i B3 wystąpiło wyboczenie dystorsyjne.

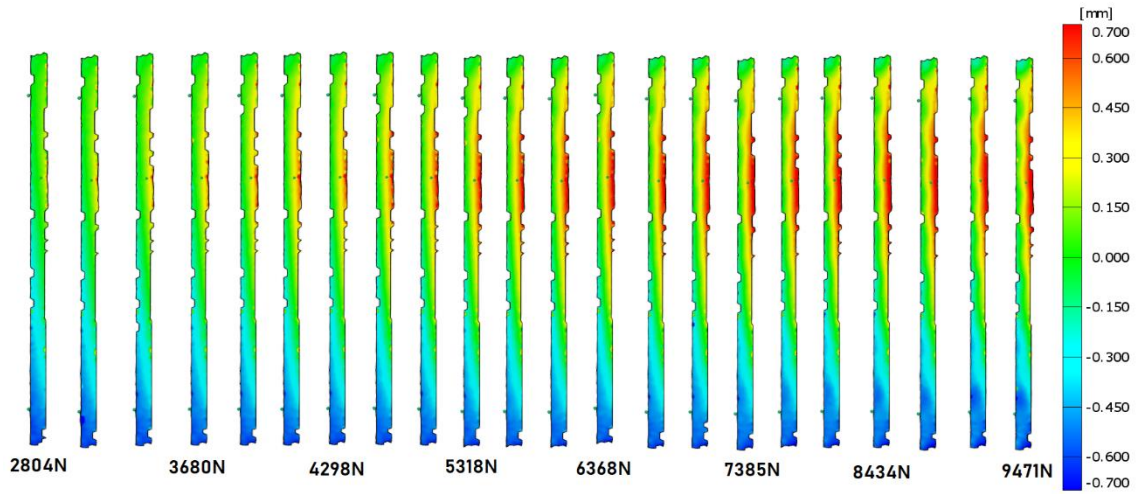
Na rysunku 4.16. przedstawiono postacie wyboczenia półek słupów. W przypadku słupa B3 nie zarejestrowano obrazu przemieszczeń półki. Wynika to z ukształtowania półki tego słupa.



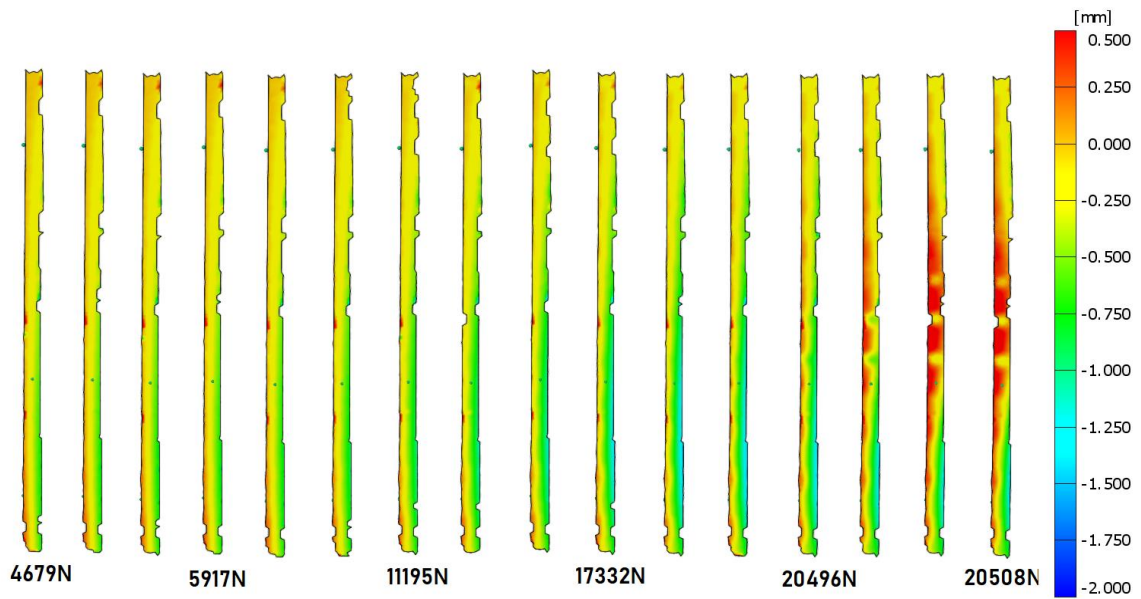
(a) Wyboczenie pólki słupa B1



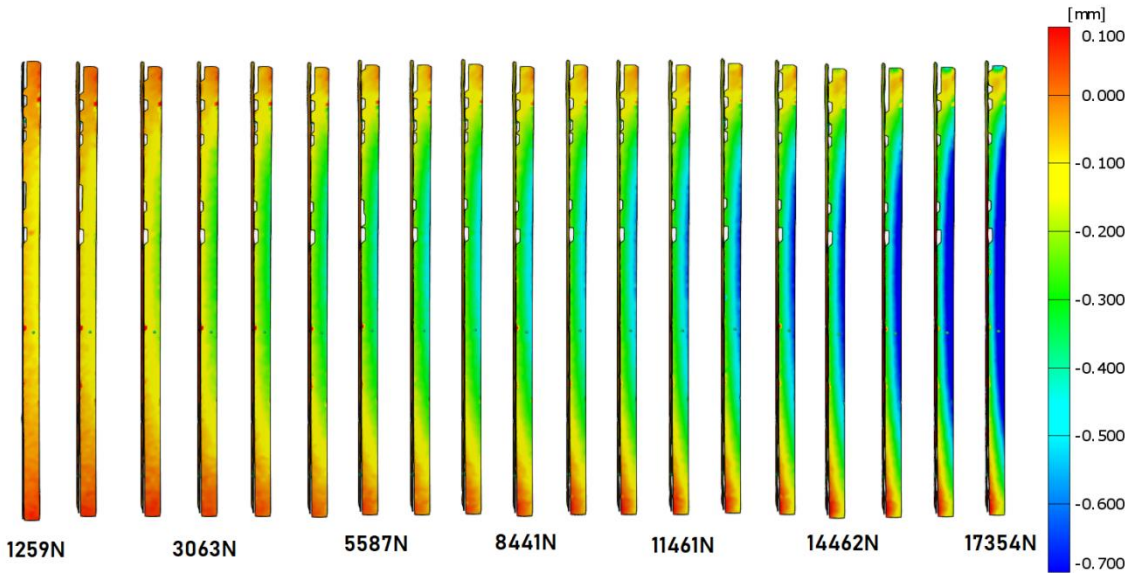
(b) Wyboczenie pólki słupa B2



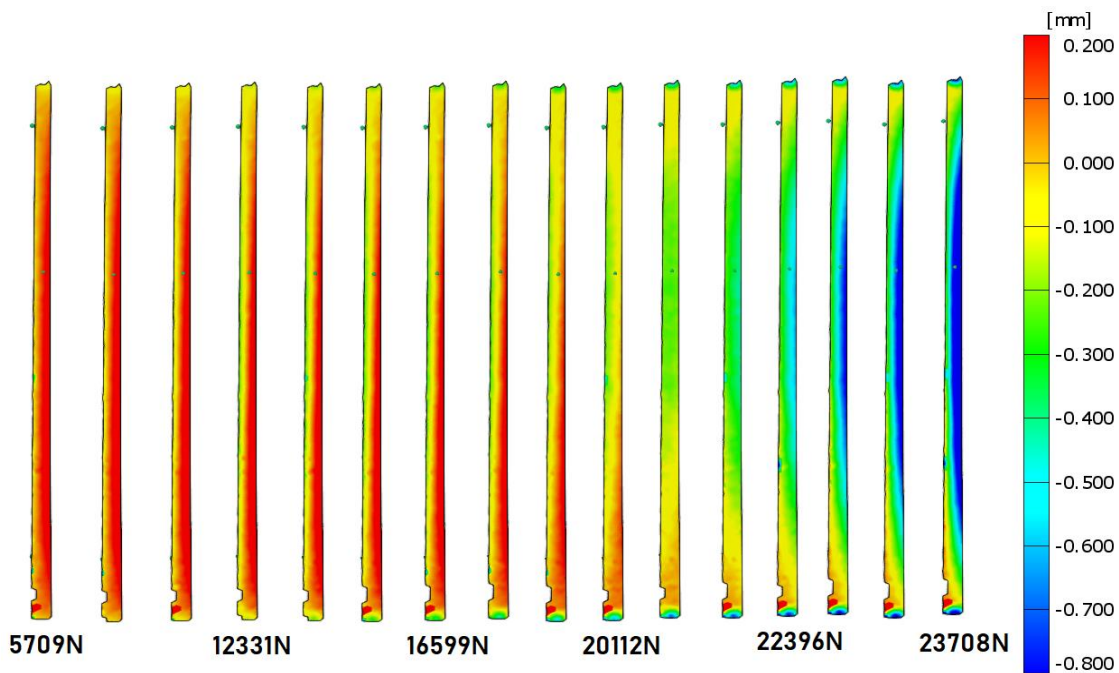
(c) Wyboczenie półki słupa B4



(d) Wyboczenie półki słupa B5



(e) Wyboczenie półki słupa B6



(f) Wyboczenie półki słupa B7

Rysunek 4.16. Formy wyboczenia półek słupów w zależności od wartości siły ściskającej

Warto zwrócić uwagę na fakt, że odkształcenia słupów zmieniają się wraz ze wzrastającą siłą ściskającą. W przypadku słupów B1, B2 wystąpiła interakcja pomiędzy dwoma postaciami wyboczenia: miejscowym i dystorsyjnym.

4.4.1.2. Siły maksymalne i wyboczeniowe

W tabeli 4.5. przedstawiono wartości sił maksymalnych (F_{\max}) oraz sił wyboczeniowych (F_w), które uzyskano na podstawie doświadczalnej metody optycznej. Ponadto w tabeli 4.5. wskazano jakim postaciom wyboczenia uległy badane słupy.

Tabela 4.5. Siły maksymalne, wyboczeniowe oraz postacie wyboczenia uzyskane na podstawie metody optycznej

Słup	F_{\max} [kN]	F_w [kN]	Postacie wyboczenia
B1	6,76	1,73	dystorsyjno-miejscowa
B2	8,28	1,90	dystorsyjno-miejscowa
B3	10,05	2,79	dystorsyjna
B4	16,52	3,82	miejscowa
B5	20,57	5,03	miejscowa
B6	23,62	8,94	miejscowa
B7	23,97	11,73	miejscowa

Dominującą postacią utraty stateczności analizowanych słupów jest wyboczenie miejscowe. Słup B3 uległ wyboczeniu dystorsyjnemu. Natomiast słupy B1 i B2 wyboczeniu dystorsyjno-miejscowemu. Najwyższą wartość siły maksymalnej uzyskano dla słupa B7, która wnosi 23,97 kN. Natomiast najniższą dla słupa B1 co do wartości równą 6,76 kN. W przypadku siły wyboczeniowej, najwyższą wartość, wynoszącą 11,73 kN, uzyskano dla słupa B7. Natomiast najniższą, wynoszącą 1,73 kN, dla słupa B1.

5. Badania numeryczne

Analiza numeryczna to zbiór wszystkich działów matematyki, które zajmują się badaniem struktur ciągłych (zbiory nieprzeliczalne). Głównym celem analizy numerycznej jest badanie możliwości wykonania obliczeń przybliżonych oraz analiza błędów powstałych na skutek tych przybliżeń. Analizę numeryczną można podzielić na poddziały:

- optymalizacja,
- teoria zagadnień własnych,
- numeryczna algebra liniowa,
- analiza błędów,
- metody numeryczne.

Metody numeryczne są zbiorem algorytmów bazujących na podstawach teoretycznych zawierających się w pozostałych działach analizy numerycznej [103].

Metody numeryczne to sposoby rozwiązywania problemów matematycznych za pomocą operacji na liczbach. Dokładność obliczeń numerycznych może być określona i dobiera się ją w zależności od potrzeb. Wyniki uzyskane na podstawie metod numerycznych są przybliżone. Metody te stosuje się gdy analizowany problem nie posiada rozwiązania analitycznego lub wtedy gdy rozwiązanie analityczne danego problemu jest skomplikowane. Metody numeryczne zalicza się do technik komputerowego wspomaganie konstruowania (*ang. CAE – Computer Aided Engineering*)

i wyróżniamy:

- Metodę Elementów Skończonych – MES (*ang. Finite Element Method FEM*),
- Metodę Elementów Brzegowych – MEB (*ang. Boundary Element Method BEM*),
- Metodę Różnic Skończonych – MRS (*ang. Finite Difference Method FDM*),
- Metodę Pasm Skończonych (*ang. Constrained and Unconstrained Finite Strip Method CuFSM*).

W niniejszej pracy przedstawiono wyniki analiz numerycznych uzyskanych na podstawie metody elementów skończonych oraz metody pasm skończonych.

5.1. Metoda elementów skończonych

Metoda elementów skończonych jest metodą rozwiązywania równań różniczkowych. Pierwsze zastosowania tej metody opisywane były już w latach 60 XX wieku [104]. Metoda MES polega na zastosowaniu interpolacji poszukiwanej funkcji, na dyskretnym zbiorze jej węzłów, powstałych na skutek dyskretyzacji dziedziny tej funkcji, czyli podziale na elementy skończone. Model MES powinien być oparty na ograniczonej ilości węzłów, które tworzą ograniczoną ilość elementów skończonych. Główną zaletą metody elementów skończonych jest możliwość uzyskania rozwiązań dla obiektów o zróżnicowanych kształtach, w szczególności dla takich, dla których przeprowadzenie obliczeń analitycznych jest skomplikowane. Dokładność wyników, uzyskanych na podstawie tej metody, zazwyczaj, zależy od podziału obiektu na elementy skończone, im więcej elementów skończonych tym dokładniejsza analiza. Natomiast wraz ze wzrostem liczby elementów skończonych wydłuża się czas obliczeń. Ponadto przy dużej liczbie elementów skończonych konieczne jest zastosowanie komputera z wysoką mocą obliczeniową. Istotnym zagadnieniem, w przypadku analiz MES, jest wiarygodność uzyskanych wyników. Mnogość błędów jakie mogą wystąpić w obliczeniach (np. błąd modelowania, błąd wartości współczynników, błąd odwzorowania obszaru...) powoduje, że bardzo często konieczne jest wykonanie badań doświadczalnych, w celu weryfikacji wyników uzyskanych na podstawie MES. Vijayanand i Anbarasu [105] przeprowadzili analizy numeryczne MES, w których przedmiotem badań były

kształtowniki wykonane ze stali zimnogiętej poddane osiowaniu ściskaniu. Następnie badania zostały zweryfikowane przy pomocy metody wytrzymałości bezpośredniej oraz metody efektywnej szerokości. Zatem metody numeryczne mogą być walidowane także przy pomocy metod analitycznych. Metoda ta stosowana jest we wszystkich dziedzinach nauki i można stwierdzić, że jest najpopularniejszą i najczęściej stosowaną metodą numeryczną.

Bonada i in. [106] zastosowali MES do analizy wpływu naprężeń szczątkowych i umocnienia, spowodowanego procesem formowania na zimno, na nośność perforowanych słupów stosowanych do konstruowania regałów. Wykonali także nieliniową analizę wyboczenia tych słupów. Wpływ naprężeń szczątkowych na zachowanie cienkościennych, laminowanych słupów, poddanych ściskaniu opisali Czapski i Kubiak [107], do analizy zastosowali MES. Metodę elementów skończonych można zastosować także do modelowania i analizy zniszczenia cienkościennych konstrukcji kompozytowych, co zostało przedstawione w pracy Banata i Mani [108]. Podobną tematykę podjęli Dębski i Jonak [109], do analiz wykorzystali system ANSYS. Ponadto wykonali badania doświadczalne, które posłużyły do weryfikacji wyników uzyskanych na podstawie metody numerycznej MES. Ding i in. [110] zastosowali MES do analizy cienkościennych, prostokątnych rur wypełnionych betonem, które poddane były osiowemu ściskaniu. Metoda elementów skończonych bardzo często znajduje swoje zastosowanie w analizie konstrukcji związanych z branżą samochodową. W pracy [111] przedstawiono badania i analizy MES dotyczące wytrzymałości cienkościennych profili, które stanowią elementy konstrukcyjne pojazdu. Rodrigues i in. [112] wykonali analizę MES belek z otworami na środku. Opisywane przez nich belki stosowane są do konstruowania budynków wielopiętrowych. Świadczy to o tym, że metoda ta stosowana jest także w budownictwie lądowym. Wyżej wymienione publikacje świadczą o tym, że metoda elementów skończonych znajduje swoje zastosowanie w wielu dziedzinach przemysłu i nauki. Ponadto bardzo często stosowana jest do analiz związanych z wytrzymałością konstrukcji.

Liniowa oraz nieliniowa analiza numeryczna MES bardzo często stosowana jest do obliczeń związanych ze statecznością konstrukcji, świadczą o tym liczne badania opisywane w artykułach naukowych. Różyło i in. [113] przy pomocy metody elementów skończonych przeanalizowali cienkościennie słupy o otwarty przekroju poprzecznym. Przedstawione przez nich badania polegały na rozwiązaniu zagadnienia związanego z nieliniową analizą stateczności, uzyskane wyniki zweryfikowane zostały przy pomocy metod doświadczalnych. Natomiast w pracy [114] opisano badania związane ze statecznością i stanami powyboczeniowymi ściskanych, cienkościennych kształtowników kompozytowych. Kształtownikom tym nadano wstępne imperfekcje poprzez uderzenie z niewielką prędkością. Do analizy zastosowali analizę MES na

podstawie, której określili obciążenia graniczne. Dębski [115] w swojej pracy podjął podobny temat, związany ze stateczności i stanami krytycznymi cienkościennych, kompozytowych słupów ceowych poddanych ściskaniu. Wykonał liniową i nieliniową analizę numeryczną MES. Interakcje pomiędzy postaciami wyboczenia wpływają na wytrzymałość oraz na odporność na utratę stateczności cienkościennych słupów. Ye i in. [116] zbadali interakcje pomiędzy miejscową a giętno-skrętną postacią wyboczenia, która wystąpiła w cienkościennym, ściskanym słupie. Natomiast w pracy [117] opisano badania związane z występowaniem interakcji pomiędzy wyboczeniem ogólnym a dystorsyjnym. Powyższe prace wykazały, że metoda elementów skończonych z powodzeniem może być stosowana do analizowania stateczności ustrojów cienkościennych poddanych ściskaniu.

Jak wcześniej zostało wspomniane modyfikacja kształtu przekroju poprzecznego cienkościennego słupa wpływa na jego wytrzymałość oraz na odporność na utratę stateczności. Metoda elementów skończonych coraz częściej stosowana jest do analizy kształtowników o niestandardowym kształcie przekroju poprzecznego. Luo i Fan [118] opisali prostokątne rury wypełnione strukturą sandwiczową. Natomiast w pracy [119] przedstawiono, w jaki sposób kształt przekroju poprzecznego wpływa na wytrzymałość i stateczność przy działaniu obciążenia ściskającego lub momentów zginających. Ganeshkumar i in. [120] przedstawili analizy MES, które dotyczyły ściskanych słupów o przekroju „*Supacee*”.

Powyższe prace naukowe wykazały, że metoda elementów skończonych znajduje swoje zastosowanie do analiz liniowych i nieliniowych związanych ze statecznością ustrojów cienkościennych, także tych o zmodyfikowanym kształcie przekroju poprzecznego.

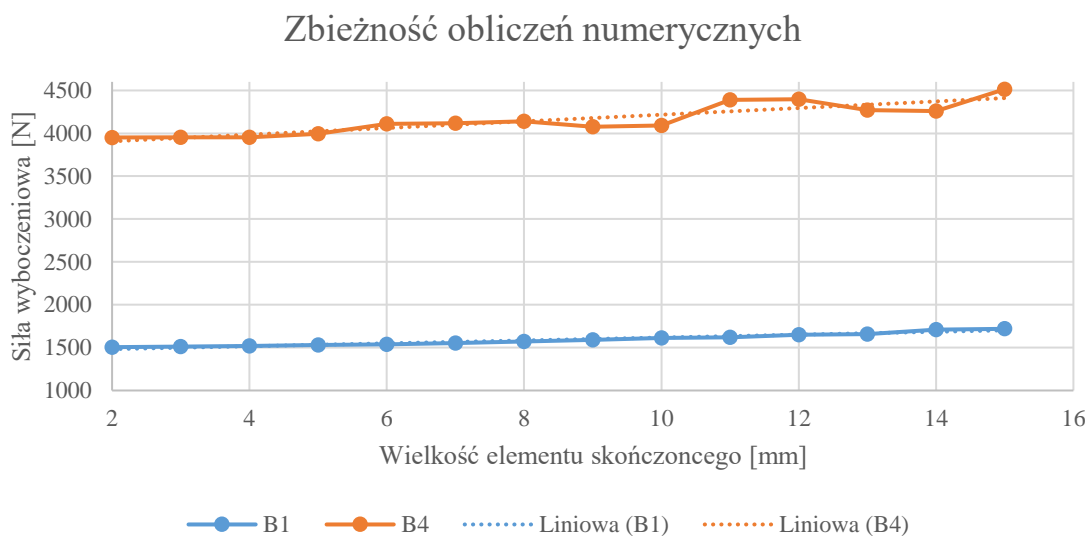
5.1.1. Model numeryczny słupa

Modele numeryczne słupów zaprojektowano w taki sposób aby ich kształty oraz wymiary odpowiadały słupom, które poddane zostały badaniom doświadczalnym. Miało to na celu umożliwienie weryfikacji wyników uzyskanych metodą numeryczną. W związku z powyższym wymiary i kształty przekroi poprzecznych słupów, dla których wykonano analizy numeryczne MES można znaleźć w rozdziale 2 niniejszej pracy.

Modele CAD słupów wykonane zostały w programie SolidWorks. Natomiast analizy MES wykonane zostały przy użyciu oprogramowania ANSYS. Zastosowano procedury numeryczne, które są dostępne w wyżej wymienionym systemie. Wykonana została analiza liniowa i analiza nieliniowa. Na podstawie analizy liniowej określono obciążenia/siły wyboczeniowe oraz postacie wyboczenia. W tym miejscu warto zwrócić uwagę na fakt, że siła wyboczeniowa nie jest tym samym co siła krytyczna. Siła krytyczna oraz mechanizmy zniszczenia słupów określono przy

pomocy analizy nieliniowej. Ponadto w analizie dopuszczono duże odkształcenie oraz odkształcenie plastyczne materiału.

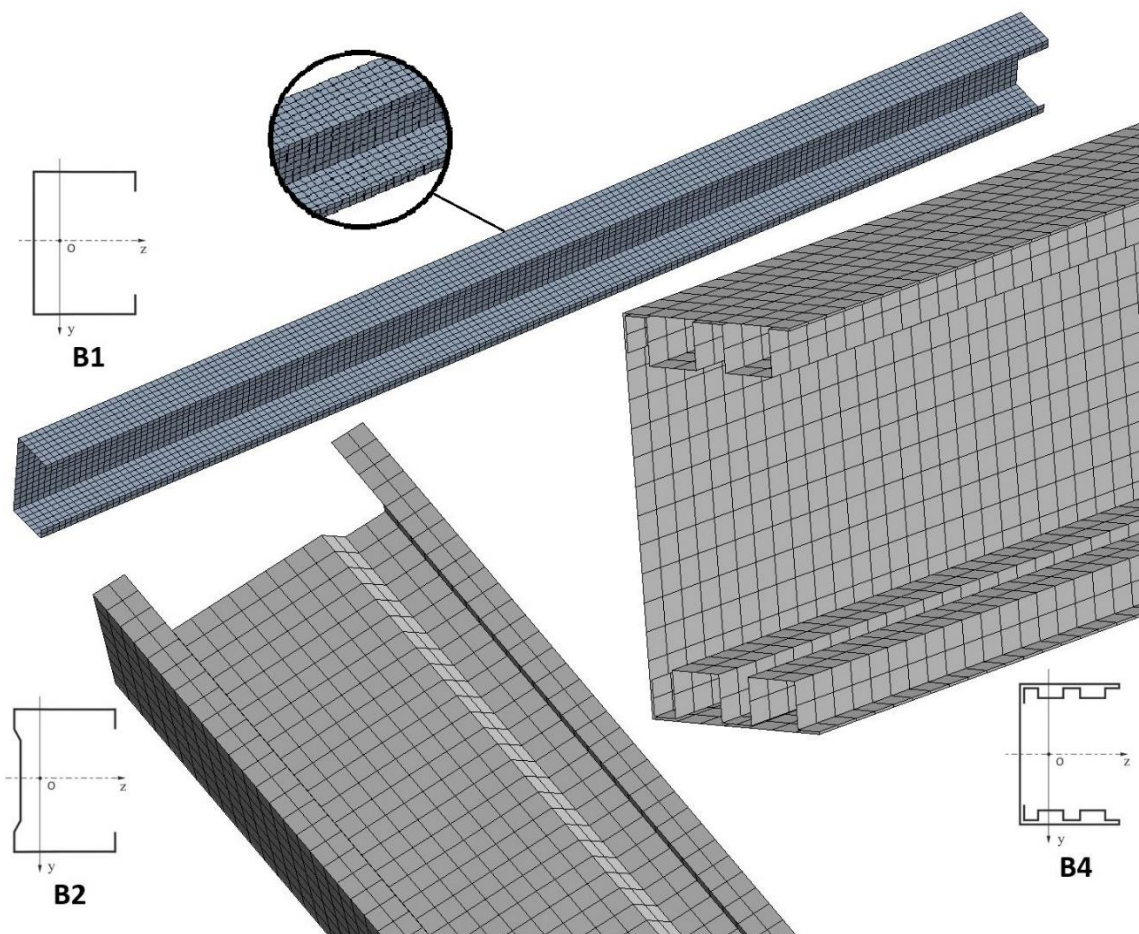
Model numeryczny pokryty został powłokowymi elementami skończonymi drugiego rzędu shell281 z ośmioma węzłami i sześcioma stopniami swobody w każdym węźle. Zastosowanie elementów powłokowych jest zalecane w przypadku analizy konstrukcji cienkościennych. Rozmiar elementu skończonego wynosił 4 mm. Na rysunku 5.1. przedstawiono wpływu rozmiaru elementu skończonego na wartość siły wyboczeniowej. Dzięki temu możliwe było określenie optymalnego rozmiaru elementu skończonego.



Rysunek 5.1. Zbieżność obliczeń numerycznych siły wyboczeniowej w zależności od wielkości elementów

Jak wcześniej zostało wspomniane wybrano element skończony o wielkości 4 mm. Na wykresie przedstawionym na rysunku 5.1. widoczne jest, że krzywe wypłaszczają się przy elemencie skończonym o wielkości 4 mm. Ponadto czas obliczeń dla tego elementu skończonego był satysfakcjonujący.

Pomimo dużego skomplikowania kształtów przekroi poprzecznych analizowanych słupów utworzenie siatki elementów skończonych nie nastąpiło wielu problemów. Widok zastosowanych siatek na kilku przykładach przedstawiono na rysunku 5.2.



Rysunek 5.2. Siatka elementów skończonych

Do modelowania słupa zastosowano multi-liniowy model materiału, który opisano parametrami wskazanymi w tabeli 5.1.

Tabela 5.1. Parametry opisu modelu materiału zastosowanego w metodzie MES

Właściwość	Symbol	Wartość	Jednostka
Moduł Younga	E	181	GPa
Współczynnik Poissona	ν	0,3	/
Moduł Kirchhoffa	G	69615	MPa
Moduł Helmholtza	K	$1,5083 \cdot 10^5$	MPa

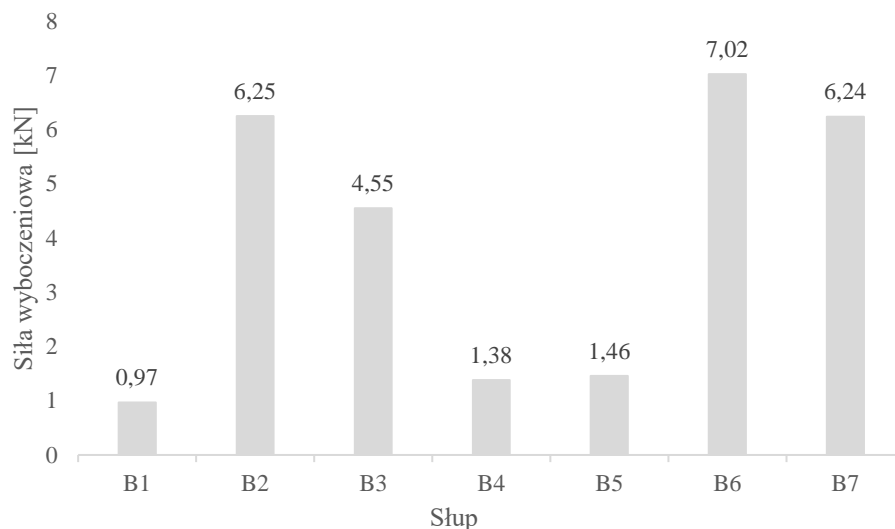
Aby uzyskać warunki czystego ściskania, siła ściskająca przyłożona została w środku ciężkości przekroju poprzecznego słupa. Ponadto zadane warunki brzegowe odpowiadały tym, które zaimplementowano podczas badań doświadczalnych, celem było umożliwienie weryfikacji uzyskanych wyników. Warunki brzegowe nadane zostały poprzez odpowiednio odsunięte (od

końców słupa) układy współrzędnych, zastosowano funkcję *Remote Displacement*. Ponadto nadano imperfekcję wstępną o wielkości 10% grubości blachy.

W przypadku słupów posiadających podwójną blachę na półce, konieczne było określenie zależności pomiędzy powierzchniami kontaktowymi. Zastosowano kontakt tarcowy o współczynnika tarcia równym 0,15.

5.1.2. Liniowa analiza wyboczenia słupów i uzyskane wyniki

Pierwszym etapem zastosowania metody MES była analiza liniowa, czyli analiza stateczności ściskanych słupów. Zastosowano moduł *Structural stability*, czyli liniową analizę stateczności. W wyniku tej analizy określono siły wyboczeniowe i odpowiadający im postacie wyboczenia. Wartości pierwszej mody siły wyboczeniowej pokazano na wykresie przedstawionym na rysunku 5.3.

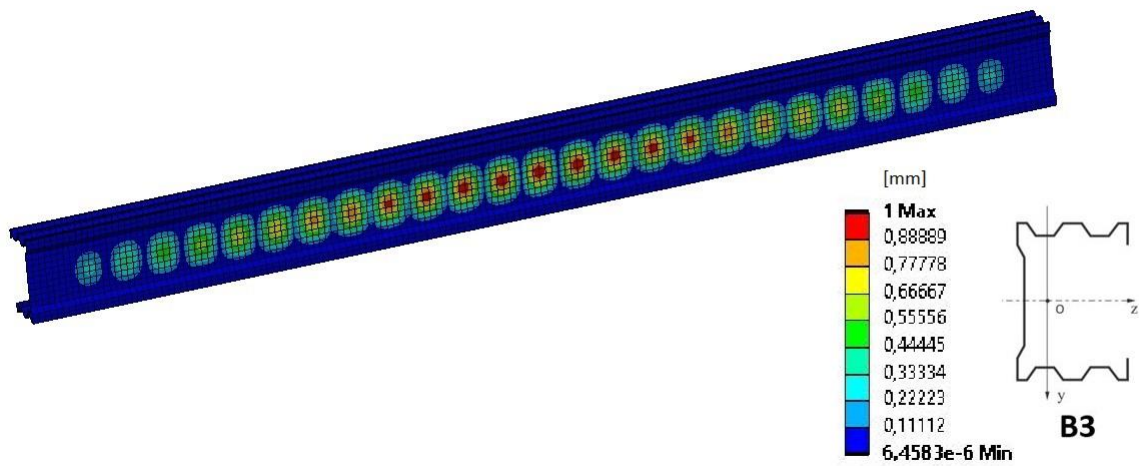
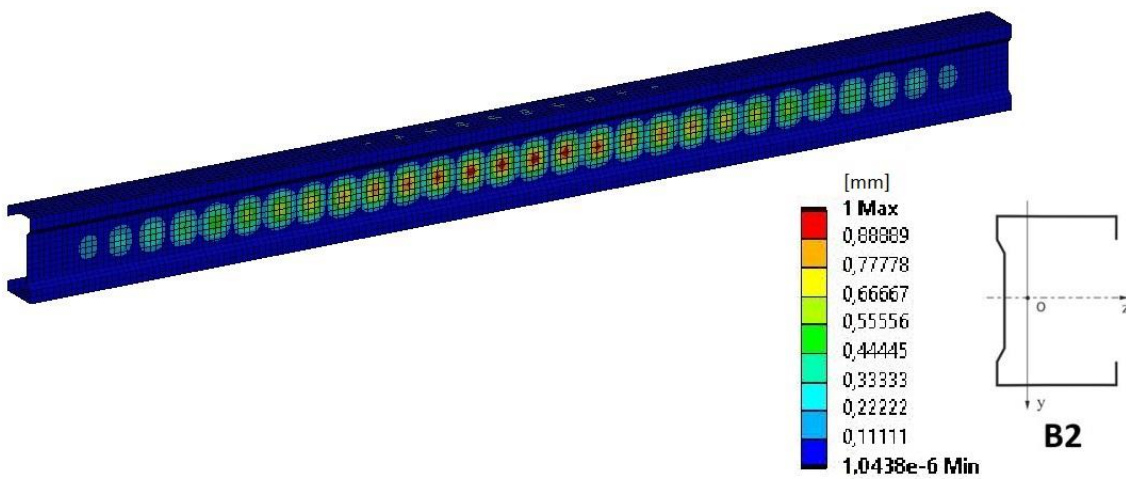
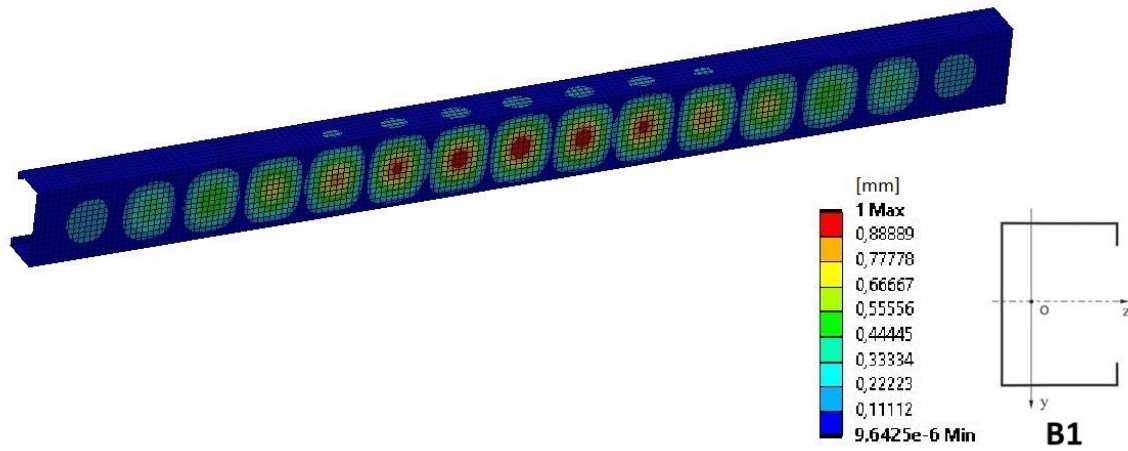


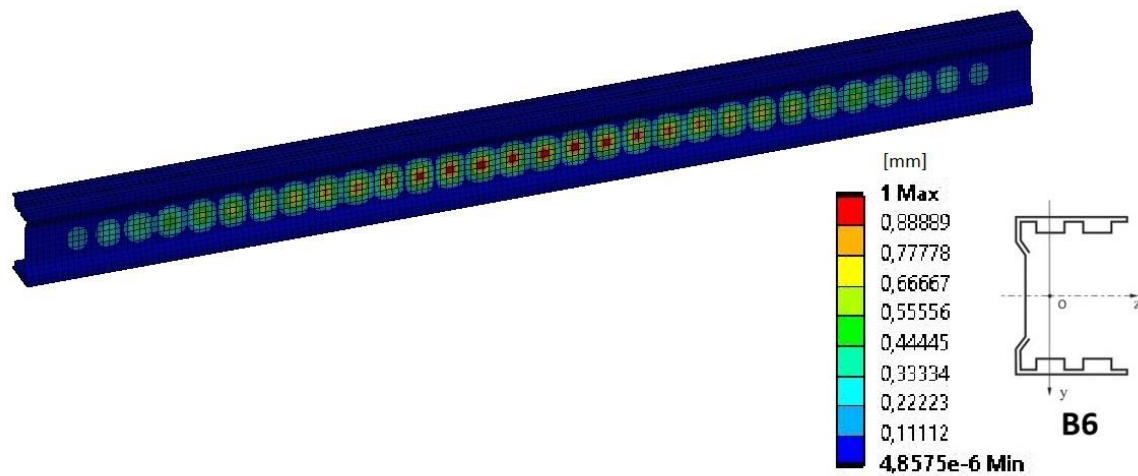
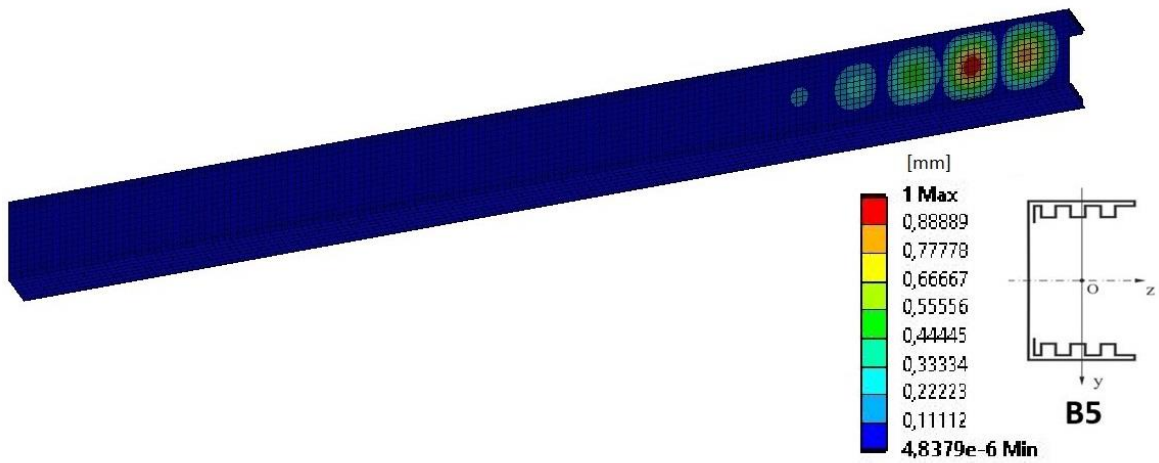
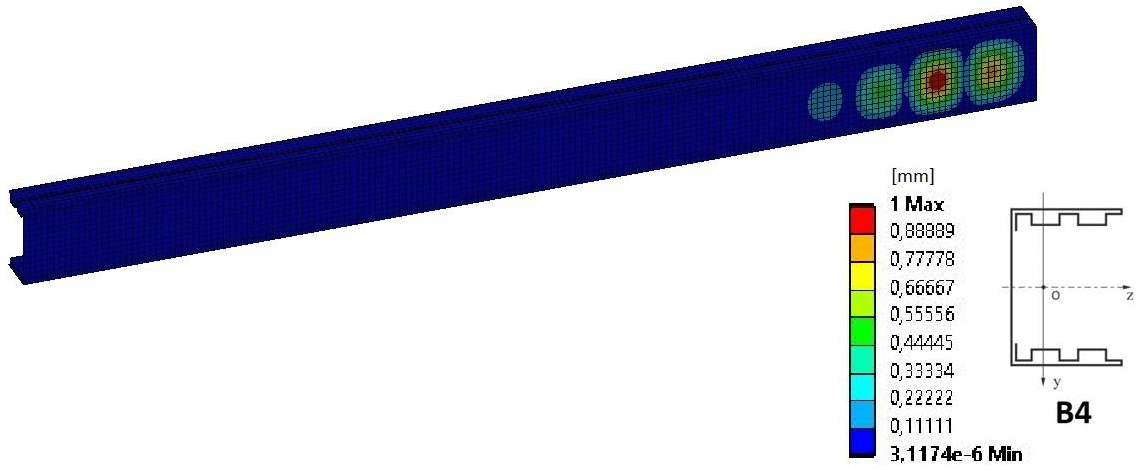
Rysunek 5.3. Wartości sił wyboczeniowych

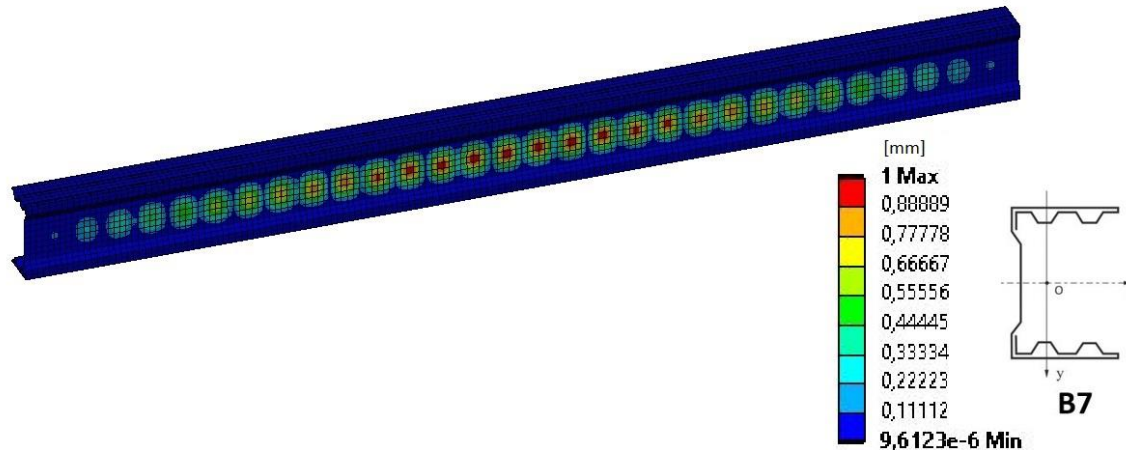
Najwyższą wartość liniowej siły wyboczeniowej uzyskano dla słupa B6, co do wartości równą 7,02 kN. Natomiast najniższą, równą 0,97 kN, dla słupa B1.

Zauważono, że modyfikacje kształtów przekroji poprzecznych słupów zwiększają wartości sił wyboczeniowych, wyjątek stanowią słupy B4 i B5. Warto zwrócić uwagę na fakt, że niestandardowe kształty przekroji poprzecznych oddziałują również na postacie wyboczenia. Widoczne jest to na rysunku 5.4., gdzie przedstawiono postacie wyboczenia uzyskane na podstawie numerycznej analizy liniowej. Słupy B3, B4, B5, B6 i B7 odkształciły się tylko na środku, na

półce nie zauważono oznak odkształcenia. Może to wynika z faktu, że słupy te posiadają zmodyfikowany kształt półki.





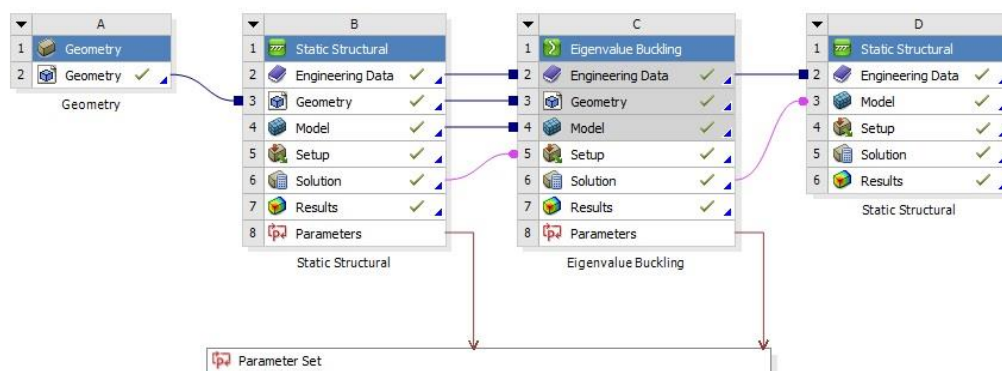


Rysunek 5.4. Postacie wybożenia słupów uzyskane na podstawie analizy liniowej

Odształcenia wstępne, które uzyskano na podstawie analizy liniowej (rys. 5.4), zaimplementowano do analizy nieliniowej i stanowiły one wstępne postacie wybożenia słupów.

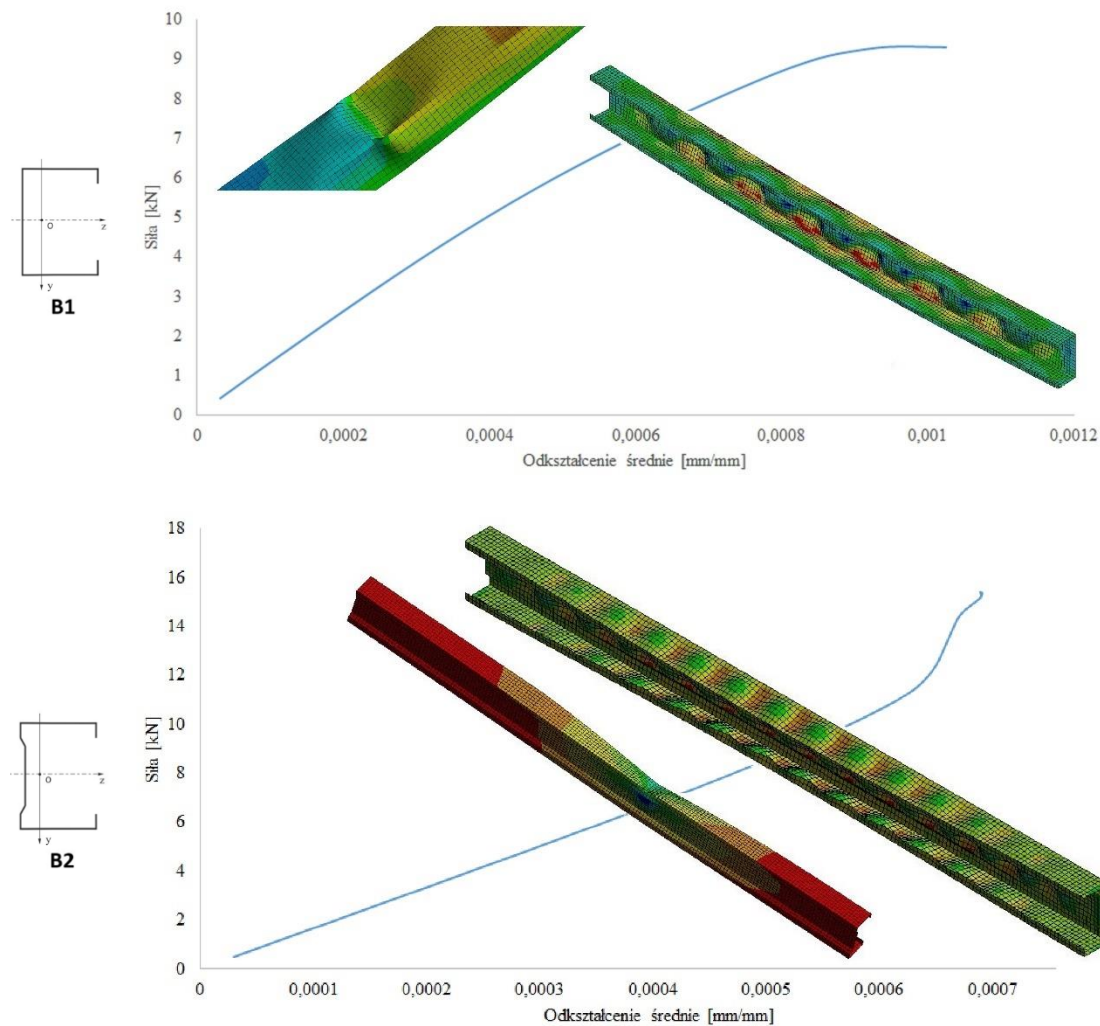
5.1.3. Nieliniowa analiza wybożenia słupów i uzyskane wyniki

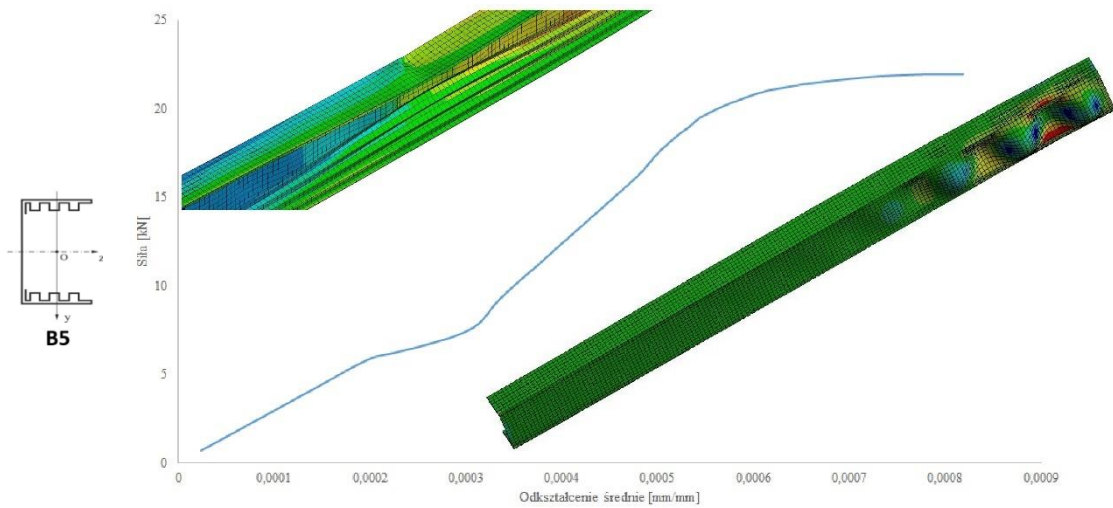
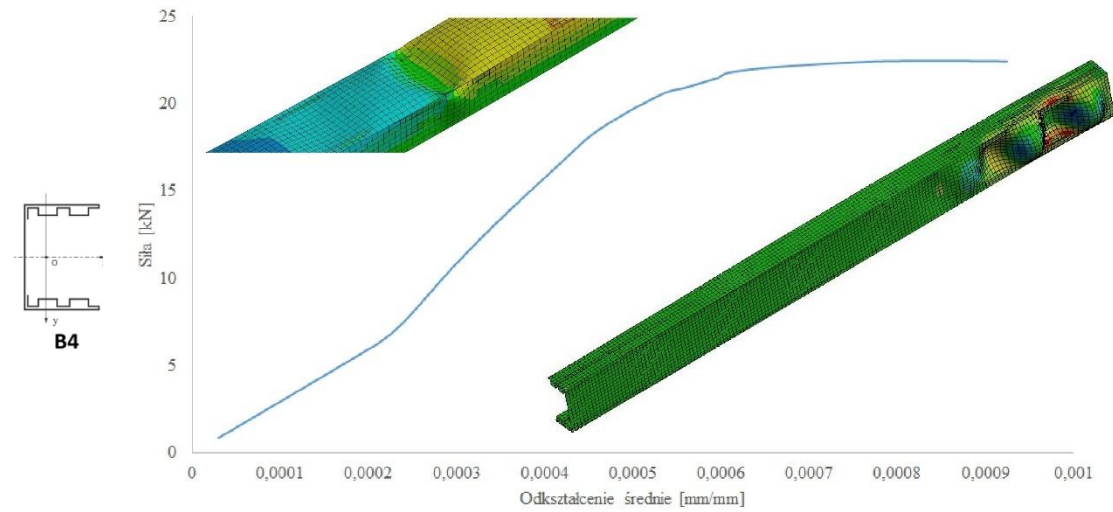
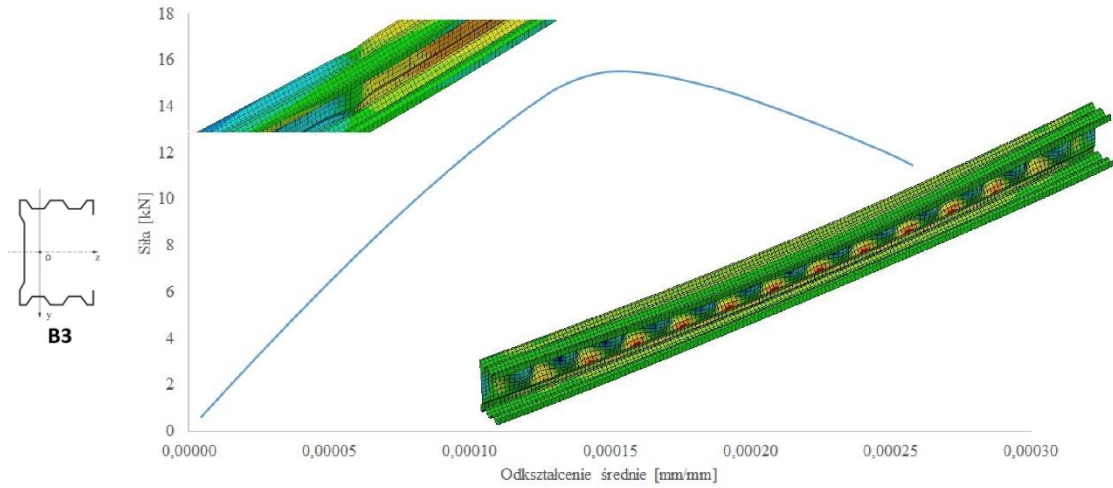
Kolejnym etapem analizy MES była nieliniowa analiza wybożenia słupów. W tym celu zastosowano moduł *Eigenvalue Buckling*, a następnie *Structural Stability*. Na podstawie tych analiz możliwe było wyznaczenie wartości sił krytycznych, ponieważ uzyskano wykres zależności siły w funkcji odkształcenia, czyli ścieżkę równowagi dla ściskanego słupa. Analiza nieliniowa umożliwia ocenę pokrytycznej pracy konstrukcji, zatem określono również formy zniszczenia słupów. Jak wcześniej zostało wspomniane, odkształcenie wstępne do analizy nieliniowej zaimplementowane zostało z analizy liniowej, co pokazane zostało na rysunku 5.5., na schemacie projektu w programie ANSYS.

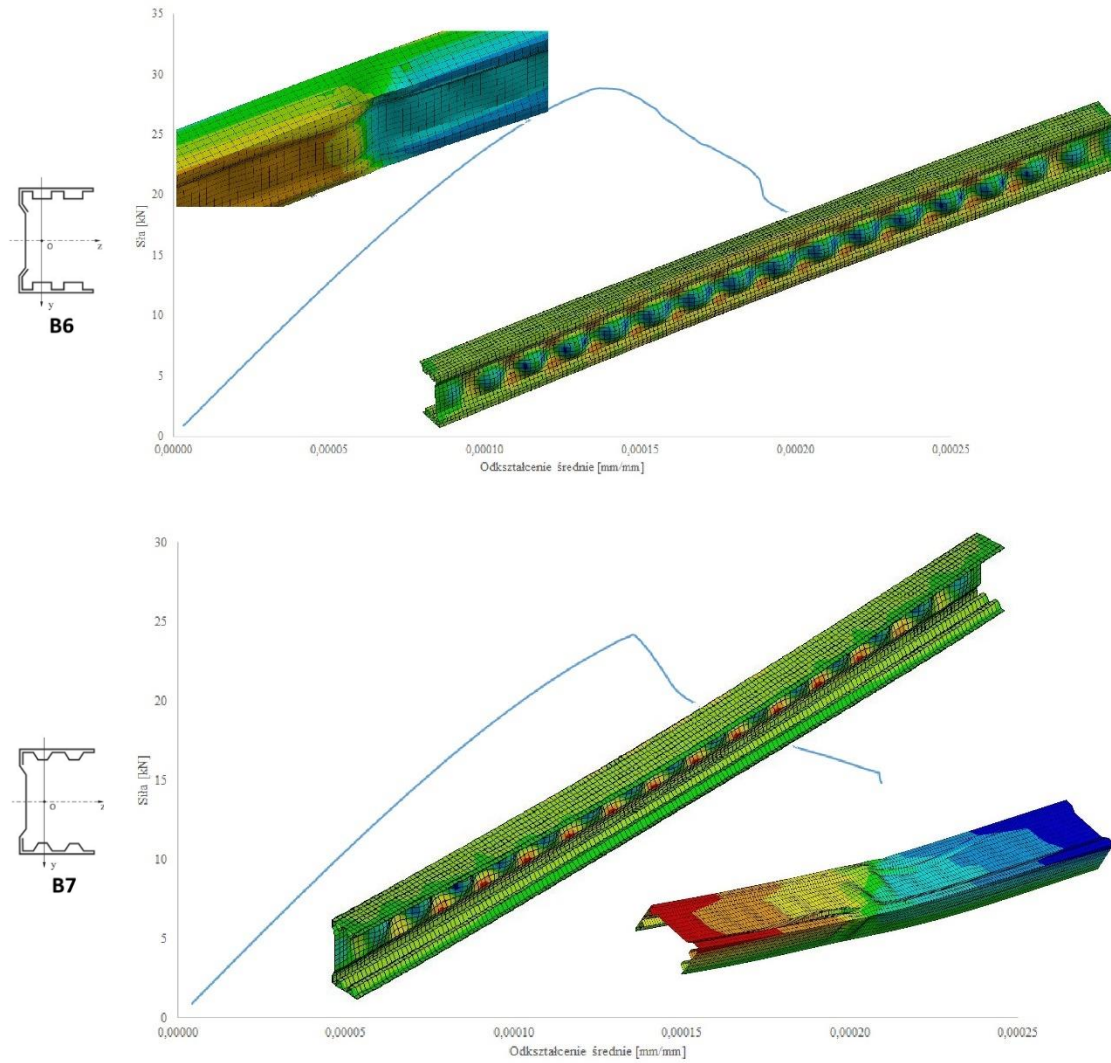


Rysunek 5.5. Schemat projektu stworzonego w programie Ansys (analiza liniowa i analiza nieliniowa)

Na rysunku 5.5. widoczne są także moduły zaimplementowane do analizy liniowej. Głównym celem zastosowania analizy nieliniowej było wyznaczenie wartości sił krytycznych dla ściskanych słupów. Ścieżki równowagi, uzyskane na podstawie nieliniowej analizy MES oraz mechanizmy zniszczenia słupów pokazano na rysunku 5.6. Ścieżki równowagi to zależność pomiędzy siłą ściskającą słupek, a odkształceniem.

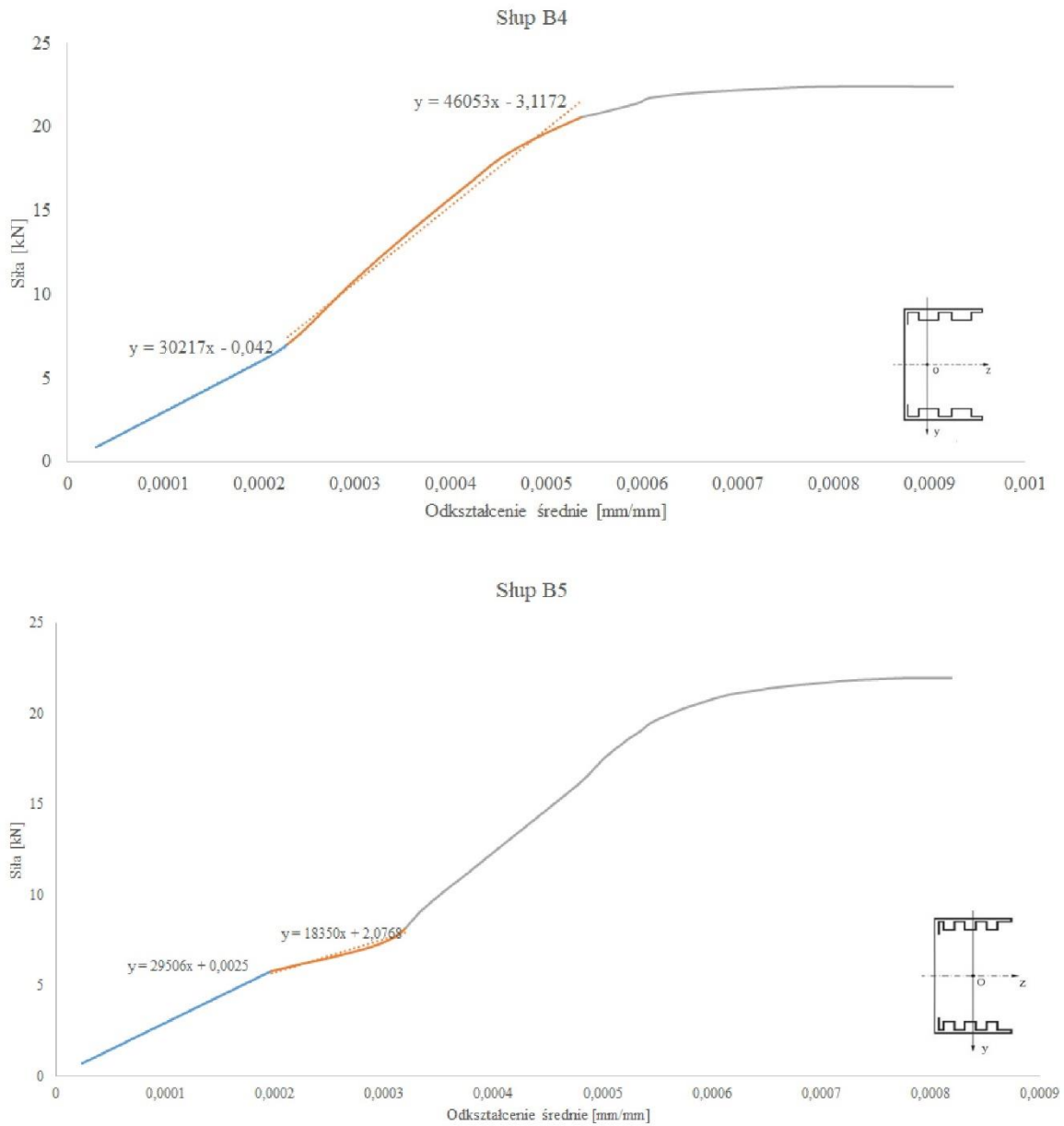






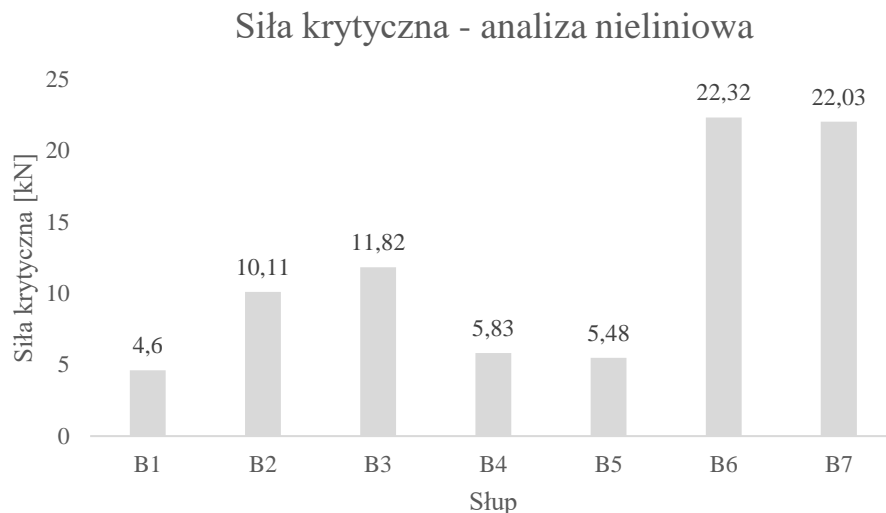
Rysunek 5.6. Ścieżki równowagi uzyskane na podstawie analizy nieliniowej wraz z mechanizmami zniszczenia ściskanych słupów

Na podstawie ścieżek równowagi z zastosowaniem metody uśrednionego odkształcenia określono wartości sił krytycznych, co pokazane zostało na wykresach znajdujących się na rysunku 5.7.



Rysunek 5.7. Zastosowanie metody uśrednionego odkształcenia do wyznaczenia siły krytycznej uzyskanej na podstawie ścieżek równowagi

Na rysunku 5.7. pokazano zastosowanie wyżej wymienionej metody dla słupów B4 oraz B5. Dla pozostałych słupów implementacja tej metody jest analogiczna. Uzyskane wartości sił krytycznych przedstawiono na wykresie na rysunku 5.8.



Rysunek 5.8. Wartości sił krytycznych dla słupów uzyskane na podstawie nieliniowej analizy MES

Najwyższą wartość siły krytycznej uzyskano dla słupa B6, co do wartości równą 22,32 kN. Nieco niższą wartość uzyskano dla słupa B7, równą 22,03 kN. Natomiast najniższą wartość siły krytycznej uzyskano dla słupa B1, co do wartości równą 4,6 kN.

5.2. Metoda pasm skończonych

Metoda pasm skończonych jest metodą służącą do analizy numerycznej pojedynczych płyt prostokątnych lub bardziej skomplikowanych płyt przyzmatycznych. Płyty te modeluje się jako skończone ilości pasm biegnących przez całą długość płyty. Metoda ta pod względem sposobu obliczeń (podział elementu na pasma, funkcja kształtu) wywodzi się z metody elementów skończonych, co za tym idzie dokładność tej metody uzależniona jest od podziału elementu na pasma. W pracy Turveya i Marshalla [121], przeanalizowano zginaną kompozytową płytę laminowaną. Zastosowali metodę CuFSM, ponieważ metoda ta pozwala uwzględnić efekt ścinania, co było niemożliwe przy zastosowaniu klasycznej teorii płyt. Warto zauważyć, że metoda CuFSM posiada pewne ograniczenia, Jin i in. [122] zwrócili uwagę na fakt, że metoda ta pozwala analizować jedynie przekroje składające się z elementów płaskich i prostych. W związku z tym, w swojej pracy, opracowali nową metodę, która oparta jest na klasycznej metodzie CuFSM, ale pozwala na analizę elementów, które nie są płaskie. To podejście pozwoliło na analizę dowolnych przekrojów, w tym zamkniętych, zakrzywionych oraz przekrojów z zaokrąglonymi narożnikami.

Metoda pasm skończonych znajduje swoje zastosowanie w analizie ustrojów cienkościennych o zmodyfikowanym kształcie przekroju poprzecznego. Paczos [123] wykonał

analizę CuFSM oraz badania doświadczalne cienkościennych belek, formowanych na zimno, poddanych zginaniu. Belki te posiadały niestandardowy kształt przekroju poprzecznego – podwójne arkusze blachy na półkach uformowane w „skrzynki”. Podobna tematyka podjęta została w pracy Grendy i Paczosa [13], przedmiotem badań doświadczalnych i analiz CuFSM, były kształtowniki o niestandardowym kształcie przekroju poprzecznego, modyfikacji podlegał nie tylko kształt półki, ale także kształt środka. Natomiast Huang i in. [124] przeanalizowali, przy pomocy metody pasm skończonych, cienkościennie ceowniki posiadające żebrowanie na środku, którego zadaniem było usztywnienie przekroju.

Metoda pasm skończonych dedykowana jest do analizy cienkościennych kształtowników, które ulegają utracie stateczności. Badania i analizy przedstawione w licznych pracach dowiodły, że metoda ta sprawdza się przy określaniu postaci wyboczenia oraz przy wyznaczaniu wartości siły krytycznej. Jin i in. [125] zastosowali analizę CuFSM do analizy utraty stateczności cienkościennych kształtowników. Celem badań była identyfikacja postaci wyboczenia. Ádány i in. [126] przedstawili analizy CuFSM, które zweryfikowali przy pomocy uogólnionej teorii belek. Celem było porównanie tych dwóch metod, ponieważ na ich podstawie można określić udział poszczególnych postaci wyboczenia w całkowitej utracie stateczności belek. Szymczak i Kujawa [127] zaproponowali rozwiązanie analityczne (zasada minimalnej całkowitej energii potencjalnej), które porównali z wynikami uzyskanymi na podstawie metody MES oraz CuFSM. Celem ich badań było sprawdzenie zasadności i zakresu stosowalności tych metod do opisu zachowania powybozeniowego ceowników formowanych na zimno poddanych ścisaniu lub zginaniu. Metoda pasm skończonych może być podstawą do opracowania nowych metod przewidywania wytrzymałości stalowych ustrojów cienkościennych. De Lazzari i de Miranda Batista [128] opracowali program komputerowy o nazwie *FStr Computer Application*, dzięki któremu możliwa jest analiza wyboczenia przy projektowaniu konstrukcji cienkościennych o dowolnych przekrojach poprzecznych. Zaproponowana przez nich aplikacja wykorzystuje metodę pasm skończonych.

Powyższy przegląd literaturowy wykazał, że metoda pasm skończonych znajduje zastosowanie w analizie cienkościennych, formowanych na zimno słupów o zmodyfikowanym kształcie przekroju poprzecznego.

5.2.1. Model numeryczny słupa

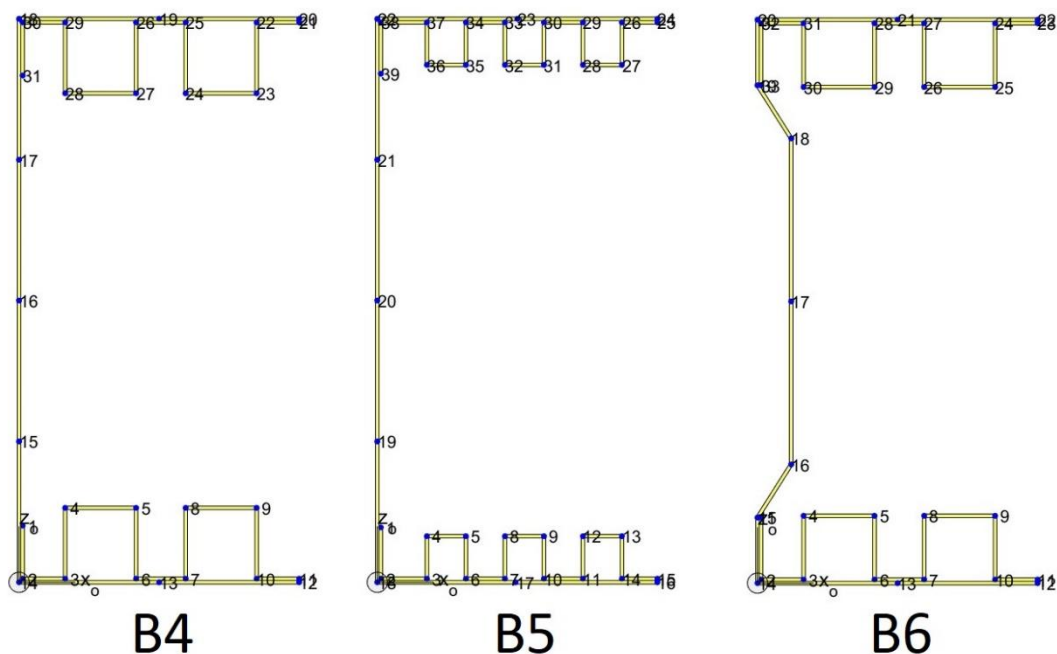
Wykonano analizy numeryczne metodą pasm skończonych przy zastosowaniu programu CUFSM v5.04. Pierwszym etapem analizy było podanie danych wejściowych, czyli określenie właściwości materiału, z którego wykonany jest słup oraz kształtu przekroju poprzecznego słupa. Do programu zaimplementowano takie wartości właściwości materiałowych oraz wymiarów

przekroji poprzecznych, które odpowiadały rzeczywistym słupom. Następnie, poprzez generator obciążenia, nadano obciążenie, w przypadku opisywanych badań była to stopniowo narastająca siła ściskająca przyłożona w środku ciężkości przekroju poprzecznego. W kolejnym kroku nadano warunki brzegowe.

W kolejnych etapach wykonywania badań metodą pasm skończonych, należy podzielić przekrój poprzeczny na pasma. Warto zwrócić uwagę na fakt, że od podziału elementu na pasma zależy dokładność uzyskanych wyników, w związku z tym sprawdzono wpływ liczby pasm na uzyskane wyniki. Analiza zbieżności przedstawiona została w tabeli 5.2 i wykonana została dla słupa B4.

Tabela 5.2. Sprawdzenie wpływu liczby pasm na półce i na środniku na uzyskane wyniki

Liczba pasm na półkach	Liczba pasm na środniku	Load factor
1	1	48,34
2	2	36,79
2	4	36,36
4	8	36,32
8	16	36,31



Rysunek 5.9. Słupy zamodelowane i podzielone na pasma w programie CuFSM

Analiza wykazała, że optymalna liczba pasm, dla słupa B4, to 2 pasma na półce i 4 pasma na środniku. Takie analizy wykonane zostały także dla pozostałych słupów. Load factor odpowiada

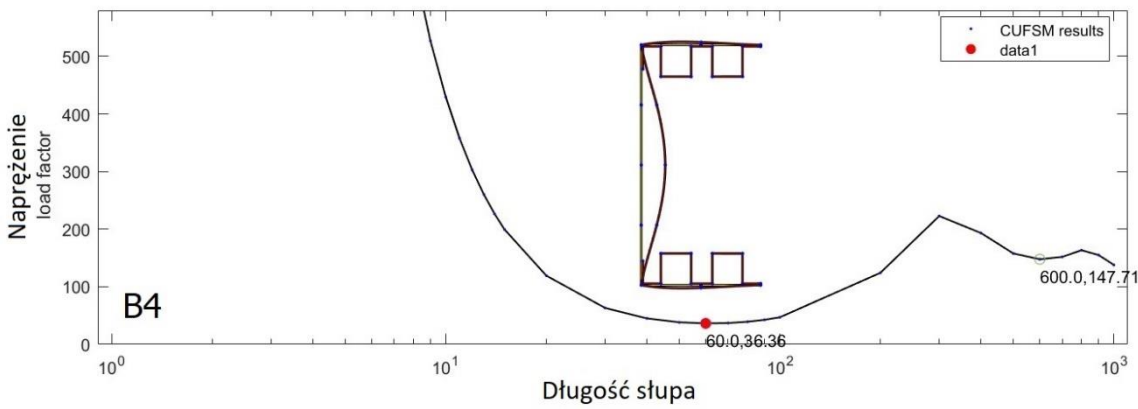
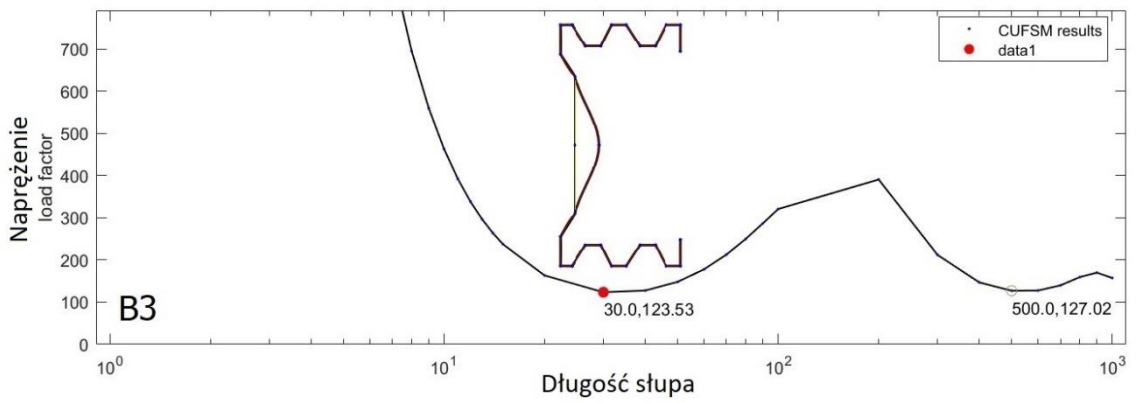
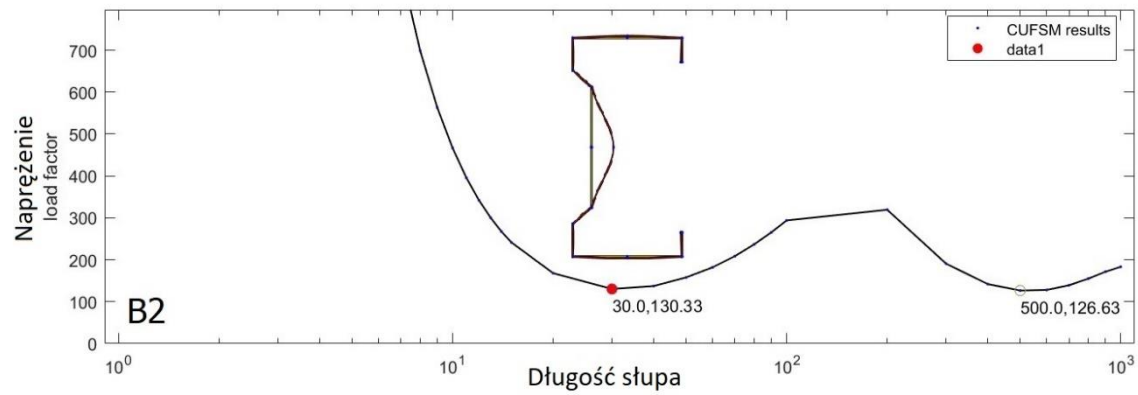
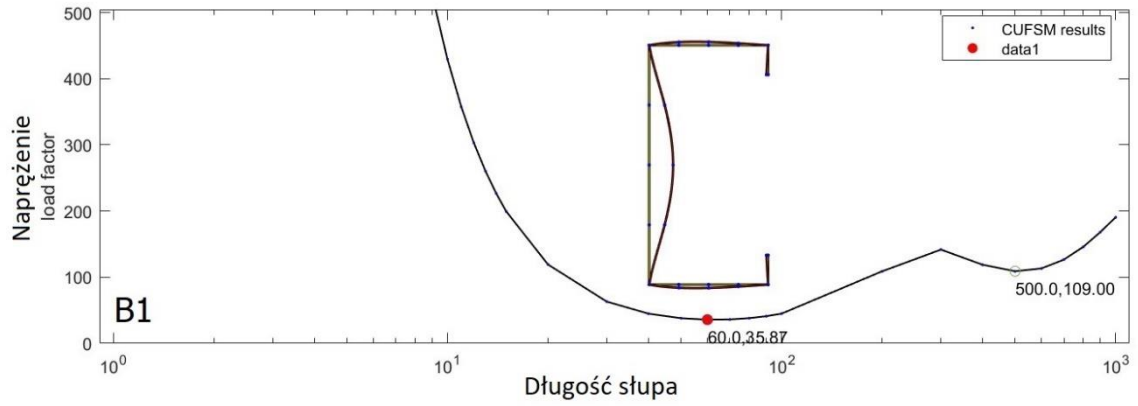
wartości naprężeń krytycznych. Znając wartość pola przekroju poprzecznego analizowanych słupów nie stanowi trudności określenie wartości siły krytycznej dla tych słupów.

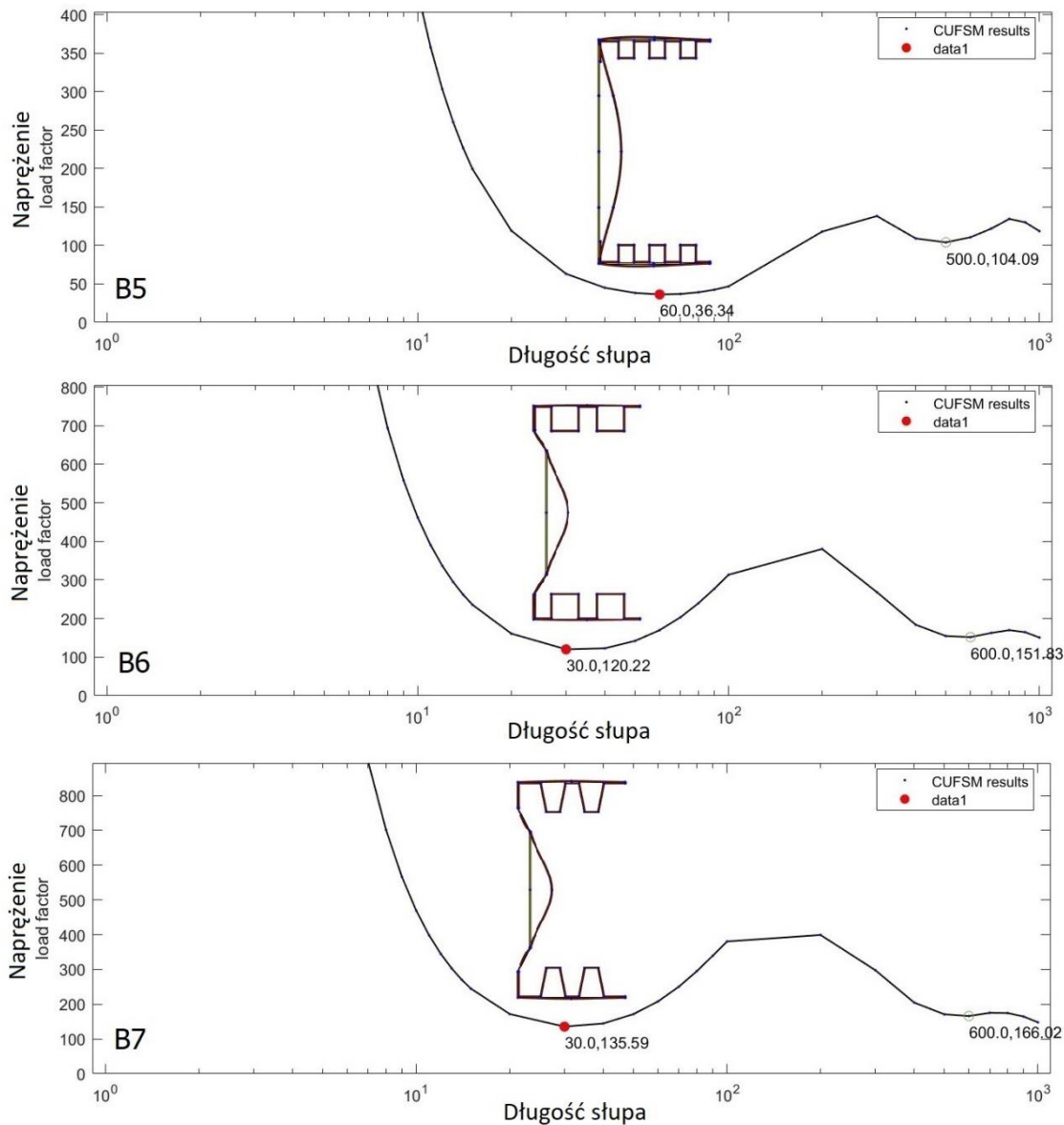
Na rysunku 5.9. przedstawiono przykładowe słupy po zamodelowaniu ich w programie oraz po podziale na pasma. Zgodnie z wynikiem analizy, w przypadku słupów z podwójną blachą na półce, zewnętrzna, płaska ścianka półki została podzielona na dwa pasma. Natomiast ścianki wzmocnień skrzynkowych oraz zagięć końcowych podzielono na osobne pasma, co widoczne jest na rysunku 5.9.

5.2.2. Analiza utraty stateczności słupów i uzyskane wyniki

Na podstawie badań metodą pasm skończonych wyznaczono wartości sił krytycznych i procentowy udział poszczególnych postaci wyboczenia w utracie stateczności badanych słupów. Ta metoda umożliwia również obserwację odkształceń słupa w trakcie przykładania stopniowo narastającej siły ściskającej.

Na rysunku 5.10. przedstawiono wyniki uzyskane na podstawie metody pasm skończonych. Widoczne są wykresy *load factor* (naprężenie) w funkcji długości słupa. Czerwonym punktem wskazano wartość obciążenia krytycznego. Na rysunku 5.10. widoczne są także odkształcenia przekroju poprzecznego słupa w chwili występowania obciążenia krytycznego.





Rysunek 5.10. Wyniki uzyskane na podstawie analiz CuFSM – wartości obciążeń krytycznych

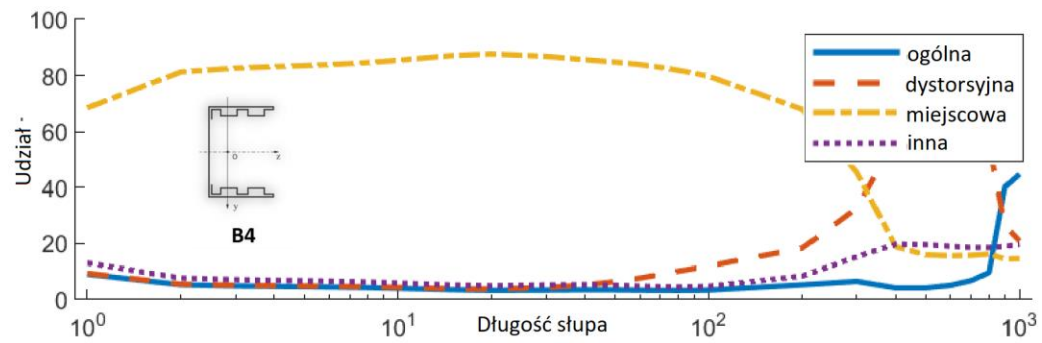
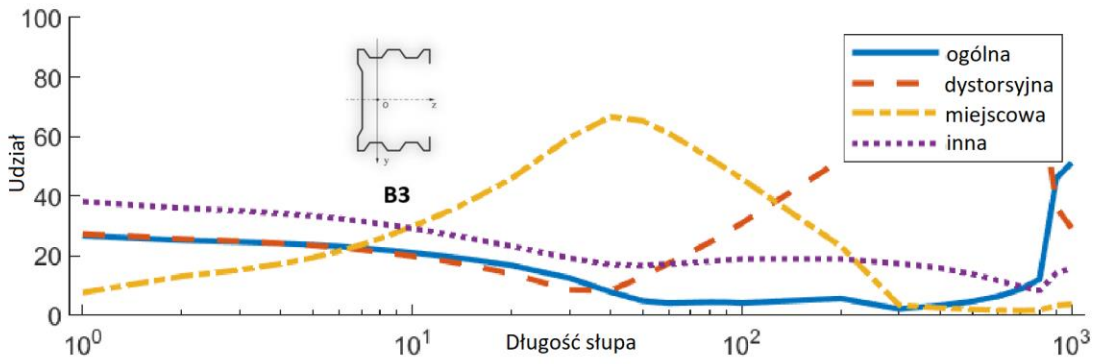
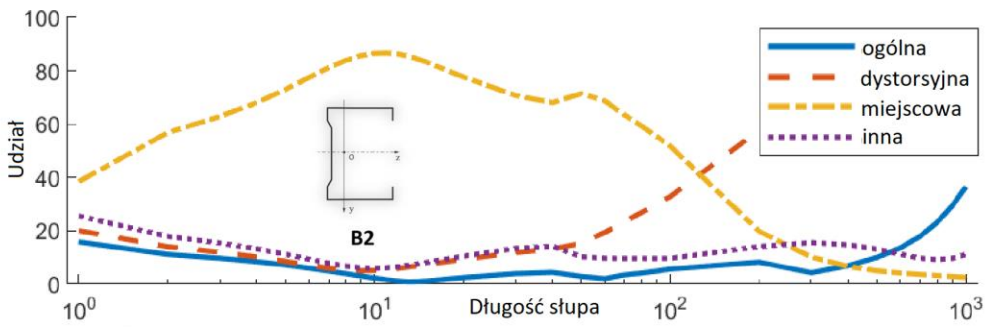
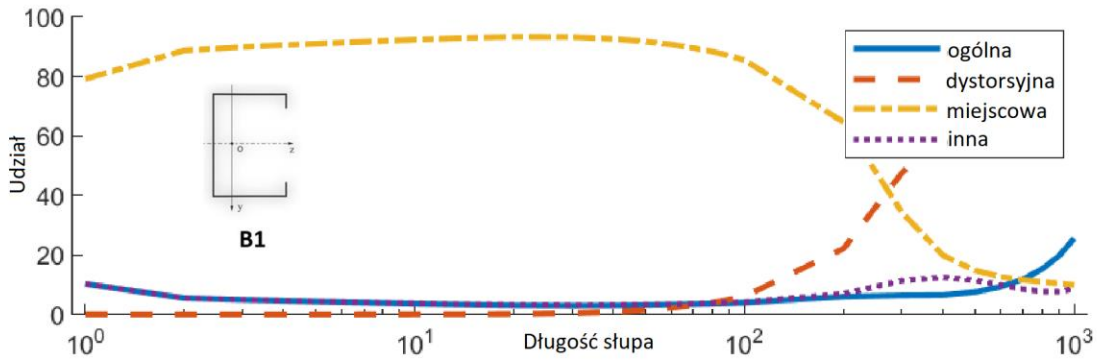
Jak wcześniej zostało wspomniane czerwony punkt wskazuje wartość napężenia krytycznego. Pierwsza współrzędna tego punktu określa długość, a druga wartość napężenia krytycznego. Wartości sił krytycznych, uzyskanych na podstawie analizy CuFSM przedstawiono w tabeli 5.3.

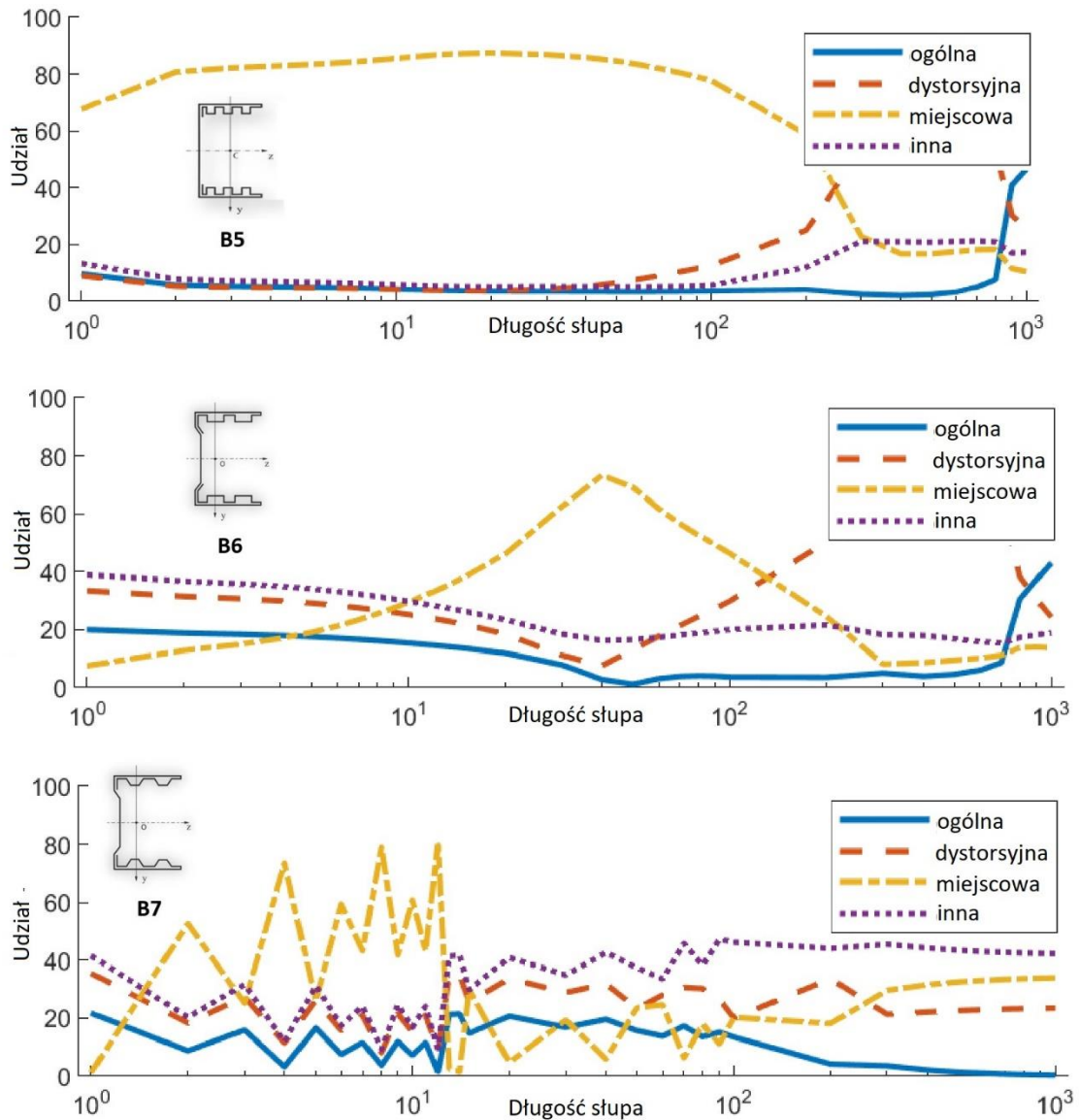
Tabela 5.3. Wartości naprężeń i sił krytycznych uzyskane na podstawie analizy CuFSM

Słup	Naprężenie krytyczne [MPa]	Siła krytyczna [kN]
B1	35,87	3,19
B2	130,33	12,12
B3	125,52	13,06
B4	36,36	6,04
B5	36,34	5,89
B6	120,22	19,82
B7	135,59	22,18

Najwyższą wartość siły krytycznej, równą 22,18 kN uzyskano dla słupa B7, czyli słupa posiadającego podwójny arkusz blachy na półce, ukształtowany w trapezy oraz zmodyfikowany kształt środka. Nieco niższy wynik, równy 19,82 kN, uzyskano dla słupa B6, który pod względem modyfikacji przekroju poprzecznego, od słupa B7 różni się jedynie kształtem zagieć na półce. Natomiast najniższą wartość siły krytycznej uzyskano dla słupa B1, co do wartości wynoszącą 3,19 kN. Był to wynik spodziewany, ponieważ ten słup jest najbardziej klasyczny, pod względem kształtu przekroju poprzecznego oraz przyjęty jest za słup bazowy, który pozwala na określenie efektywności modyfikacji kształtów przekroi poprzecznych.

Metod pasm skończonych umożliwia określenie procentowego udziału poszczególnych postaci wyboczenia w całkowitej utracie stateczności ściskanych słupów. Na rysunku 5.11. przedstawiono przebieg udziałów poszczególnych postaci wyboczenia w zależności długości słupa.





Rysunek 5.11. Udziały poszczególnych postaci wybočenja w całkowitej utracie stateczności słupów w zależności od długości

W tabeli 5.4. przedstawiono procentowe udziały poszczególnych form wybočenja w całkowitej utracie stateczności ściskanych słupów. Warto zwrócić uwagę na fakt, że wartości te odczytane zostały w chwili występowania obciążenia krytycznego.

Tabela 5.4. Udziały poszczególnych postaci wyboczenia w całkowitej utracie stateczności analizowanych słupów w chwili występowania obciążenia krytycznego

Słup	Wyboczenie ogólne	Wyboczenie dystorsyjne	Wyboczenie miejscowe	Inna postać wyboczenia
B1	3,4%	2,3%	90,8%	3,5%
B2	4,0%	11,8%	70,8%	13,4%
B3	12,6%	8,6%	59,7%	19,2%
B4	3,4%	7,7%	83,9%	4,9%
B5	3,5%	8,1%	83,2%	5,2%
B6	7,9%	11,2%	62,4%	18,5%
B7	16,9%	28,9%	19,3%	34,9%

Dominującą postacią utraty stateczności jest wyboczenie miejscowe, dotyczy to słupów B1, B2, B3, B4, B5 i B6. Natomiast w przypadku słupa B7 dominuje inna postać wyboczenia, natomiast co do wartości, kolejnym wynikiem dla tego słupa jest wyboczenie dystorsyjne. W analizie słupów cienkościennych spodziewaną postacią utraty stateczności jest wyboczenie miejscowe lub interakcje pomiędzy wyboczeniem miejscowym a dystorsyjnym. W związku z tym, wyniki uzyskane na podstawie analizy CuFSM są przewidywalne, mimo tego, że w porównaniu z postaciami wyboczenia uzyskanymi na podstawie badań doświadczalnych, nie znajdują całkowitego pokrycia.

6. Omówienie uzyskanych wyników

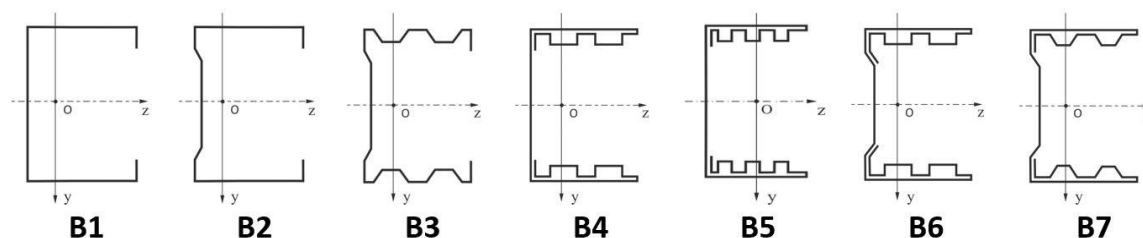
W niniejszym rozdziale przedstawiono zestawienie wyników uzyskanych na podstawie przeprowadzonych badań i analiz. Zwrócono również uwagę na wnioski płynące z przeglądu literatury, które wykazały innowacyjność przedstawianej tematyki badawczej. Ponadto wykazano, że cele pracy zostały osiągnięte.

Ustroje cienkościenne były i są przedmiotem badań w wielu ośrodkach naukowych w Polsce i na świecie. Zainspirowało to autorkę do przeanalizowania tego zagadnienia. Przed wszystkim zwrócono uwagę na fakt, że kształty przekrojów poprzecznych słupów/belek analizowanych przez badaczy i naukowców są raczej mało skomplikowane oraz nie posiadają wielu zagięć czy usztywnień. W tym miejscu warto zwrócić uwagę, na fakt, że nawet niewielkie wzmocnienie/usztywnienie kształtownika wpływa na zwiększenie ich wytrzymałości oraz odporności na utratę stateczności. W związku z powyższym podjęto się przeprowadzenia badań i analiz kształtowników, które posiadają podwójny arkusz blachy na półkach gdzie arkusz wewnętrzny ukształtowany był w „skrzynki” lub trapezy. Ponadto przedmiotem badań były profile, których przekroje poprzeczne posiadały niewielkie modyfikacje kształtu. Zestawienie wyników uzyskanych dla profili o klasycznych przekrojach poprzecznych, takich jak „*lipped channel*” czy przekrój sigma z przekrojami o bardziej skomplikowanym kształtach, pozwoliło na ocenę wpływu modyfikacji kształtu przekroju poprzecznego na wytrzymałość i odporność na utratę stateczności ściskanych słupów ceowych.

Celem pracy było określenie wpływu ogólnej, miejscowej i dystorsyjnej utraty stateczności słupów o niestandardowych przekrojach ceowych obciążonych osiową siłą ściskającą na ich wytrzymałość, stateczność oraz nośność graniczną. Zmiana kształtu przekroju poprzecznego badanych słupów ma na celu podwyższenie wartości siły krytycznej do wartości siły maksymalnej, przy której doszło do zniszczenia słupów.

Badania przedstawione w niniejszej pracy obejmują badania doświadczalne, analizy numeryczne oraz rozwiązania analityczne. Analizy numeryczne przeprowadzone zostały w taki sposób, aby możliwa była weryfikacja uzyskanych wyników innymi metodami. Warunki brzegowe i obciążenie zastosowane w tych analizach odpowiadały tym, które zadane zostały w badaniach doświadczalnych. Natomiast warunki, w których przeprowadzone zostały badania doświadczalne odpowiadały wytycznym zawartym w normie EUROKOD 3. Podsumowując, badania przeprowadzone zostały w taki sposób, aby możliwe było porównanie wszystkich uzyskanych wyników.

Przedmiotem badań były cienkościenne słupy ceowe o niestandardowym kształcie przekroju poprzecznego. Modyfikacji podlegał kształt półki, a w niektórych przypadkach również kształt środnika. Przeanalizowane przekroje poprzecznego pokazano na rysunku 6.1.



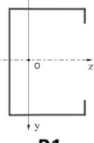
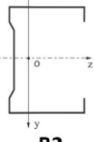
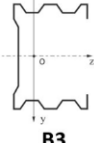
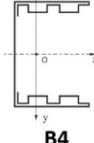
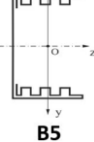
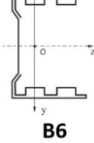
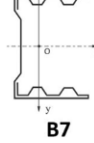
Rysunek 6.1. Kształty przekroi poprzecznych podlegających badaniom i analizie

Wyniki badań i analiz dla słupów B2-B7 porównano z wynikami uzyskanymi dla słupa B1. Słup B1, ze względu na klasyczny kształt przekroju poprzecznego („*lipped channel*”) przyjęto za słup bazowy. Dzięki temu uzyskano bezwymiarowe opis wyników, co umożliwiło ich ocenę jakościową. Oznacza to, że możliwe było stwierdzenie w jakim stopniu modyfikacja kształtu przekroju poprzecznego wpływa na wytrzymałość i stateczność ściskanych słupów.

6.1. Siła krytyczna

Siła krytyczna z definicji jest siłą przy której dochodzi do wyboczenia ściskanych słupów. Jednakże w przypadku słupów cienkościennych jest to bardziej złożone zagadnienie, które opisane zostało w niniejszej pracy. W tabeli 6.1. zestawiono wartości sił krytycznych, które uzyskano na podstawie metod doświadczalnych, numerycznych oraz rozwiązań analitycznych.

Tabela 6.1. Zestawienie wartości sił krytycznych dla analizowanych słupów

Słup	Wartości sił krytycznych [kN]			
	Metoda tensometryczna (metoda uśrednionego odkształcenia)	Metody numeryczne		Rozwiązanie analityczne
		CuFSM	MES	
 B1	2,18	3,19	4,6	2,56
 B2	8,19	12,12	10,11	10,15
 B3	12,02	13,06	11,82	13,26
 B4	5,88	6,04	5,83	4,37
 B5	5,12	5,89	5,48	4,62
 B6	19,11	19,82	22,32	18,63
 B7	21,44	22,18	22,03	17,22

- **Najwyższą wartość siły krytycznej** uzyskano dla słupa B7. Wyjątek stanowi wynik uzyskany na podstawie rozwiązania analitycznego. Niewiele niższą wartość siły krytycznej uzyskano dla słupa B6. W obu tych słupach półki wykonano z podwójnego arkusza blachy wygiętego w „skrzynki” (B6) oraz w trapezy (B7). Ponadto, w przypadku tych dwóch słupów, modyfikacji podlegał również kształt środka.

- **Najniższą wartość siły krytycznej** uzyskano dla słupa B1, czyli słupa bazowego („*lipped channel*”), którego przekrój poprzeczny posiada jedynie wzmocnienie (zagięcie) brzegowe na półce.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że analiza stateczności słupów cienkościennych o niestandardowym kształcie przekroju poprzecznego nastęrcza wiele trudności. Metoda tensometryczna pozwala na określenie odkształceń konstrukcji tylko w wybranych punktach i kierunkach. Natomiast zaletą tej metody jest fakt, że badaniom poddawane są rzeczywiste słupy, zatem uwzględniony jest wpływ umocnienia powstającego na skutek odkształcenia plastycznego podczas formowania na zimno. Ponadto na uzyskane wyniki mają wpływ imperfekcje geometryczne konstrukcji. W badaniach numerycznych nie uwzględniono umocnienia materiału powstałego w wyniku formowania konstrukcji, a wartość imperfekcji geometrycznej określono jako 10% grubości blachy. Natomiast w rozwiązaniach analitycznych zastosowano pewne uproszczenia, np. analizie poddaje się półkę i średnik kształtownika, połączenie pomiędzy półką a środkiem modelowane jest poprzez odpowiednie podparcie brzegów pasa. Wyżej wymienione czynniki mogą wpływać na różnice w uzyskanych wartościach siły krytycznej.

Każda z zastosowanych metod posiada pewne wady jak i zalety, jednakże powyższe omówienie uzyskanych wyników wykazało, że modyfikacja kształtu przekroju poprzecznego słupów zwiększa odporność na utratę ich stateczności.

6.2. Postacie utraty stateczności

Analizując odporność na utratę stateczności ściskanych słupów niezwykle istotne jest uwzględnienie postaci wyboczenia tych kształtowników. Wszystkie słupy uległy miejscowej utracie stateczności, przy czym niektóre z nich charakteryzowało wyboczenie miejscowo-dystorsyjne. Warto zwrócić uwagę na fakt, że miejscowa utrata stateczności jest najbardziej typową postacią wyboczeniem dla ustrojów cienkościennych.

- Słupy, posiadające modyfikacje kształtu przekroju poprzecznego, w szczególności te z podwójnym arkuszem blachy na półce (B4-B7) ulegały tylko **miejscowej utracie stateczności**. Charakterystyczne dla tego wyboczenia półfale pojawiały się jedynie na środku.
- **Wyboczeniu miejscowo-dystorsyjnemu** ulegały słupy z pojedynczą blachą na półce (B1-B3). Półfale charakterystyczne dla wyboczenia miejscowego pojawiały się zarówno na środku jak i na półce.

Powyższe wnioski, dotyczące postaci utraty stateczności wyników uzyskanych na podstawie optycznych badań doświadczalnych. Metoda CuFSM tylko częściowo potwierdziła te wnioski. Warto zwrócić uwagę na fakt, że metoda pasm skończonych pozwala na wyznaczenie naprężeń krytycznych, które odpowiadają różnym postaciom utraty stateczności. Wyznaczenie obciążeń krytycznych w programie CuFSM rozpoczyna się od uwzględnienia ogólnej utraty stateczności, a następnie brane pod uwagę są interakcję wyboczenia miejscowego i ogólnego, a także wyboczenia dystorsyjnego. Metoda ta uwzględnia jedynie przekrój brutto, czyli przekrój określony na podstawie wymiarów nominalnych. W efekcie program przyjmuje jako wynik najniższe uzyskane naprężenie krytyczne. Na skutek miejscowej utraty stateczności środek ciężkości przekroju poprzecznego słupa może zmienić swoje położenie, co powoduje, że metoda CuFSM może generować wyniki obarczone błędem [129]. Liniowa analiza MES wykazała, że w stanie przedkrytycznym wszystkie słupy ulegają miejscowej utracie stateczności. Półfale pojawiały się na środku, a w niektórych przypadkach także na półkach. Natomiast nieliniowa analiza MES potwierdziła wyniki uzyskane na podstawie optycznych badań doświadczalnych. Słupy posiadające pojedynczą blachę na półce, za wyjątkiem słupa B1, ulegały wyboczeniu miejscowo-dystorsyjnemu. Słupy B4-B7 ulegały miejscowej utracie stateczności.


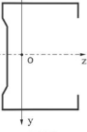
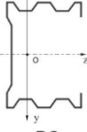
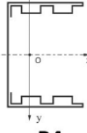
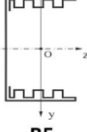
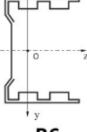
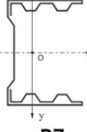
Zdaniem autorki, w tym miejscu, warto wrócić do dyskusji, która poruszana była przy omawianiu sił krytycznych. Metody numeryczne nie uwzględniają umocnień i usztywnień, które powstały na skutek formowania na zimno analizowanych kształtowników. Ponadto nie uwzględniono rzeczywistych imperfekcji/niedokładności geometrycznych. W przyszłości autorka planuje wykonać skanowanie geometrii rzeczywistych słupów, aby zaimplementować uzyskane modele do programu MES. Dzięki temu będzie możliwe ich uwzględnienie w analizie numerycznej.

6.3. Nośność

Nośność to zdolność konstrukcji do przenoszenia dopuszczalnego obciążenia. Warto zwrócić uwagę, że w przypadku konstrukcji cienkościennych, które są podatne na utratę stateczności, nośność to złożone zagadnienie, które obejmuje nie tylko siłę maksymalną. W poniższych rozważaniach przedstawione zostaną obciążenia maksymalne, jakie mogą przenieść ściskane słupy o zmodyfikowanym kształcie przekroju poprzecznego. Natomiast ważne jest, aby w ogólnej ocenie nośności ustrojów cienkościennych uwzględniać również obciążenia krytyczne, które w znaczący sposób wpływają na wytrzymałość konstrukcji.

Siły maksymalne wyznaczone zostały na podstawie metod doświadczalnych oraz numerycznych (analiza MES). Przyjęto, że siła ta odpowiada całkowitej utracie nośności słupa, czyli momentowi, w którym dochodzi do zniszczenia konstrukcji. W tabeli 6.2. przedstawiono wartości tych sił.

Tabela 6.2. Zestawienie wartości sił maksymalnych dla analizowanych słupów

Słup	Wartości sił maksymalnych [kN]		
	Metody doświadczalne		Analiza MES
	Metoda tensometryczna	Metoda optyczna	
 B1	6,75	6,76	9,31
 B2	9,99	8,28	15,43
 B3	13,53	10,05	15,49
 B4	16,50	16,52	22,45
 B5	20,55	20,57	21,93
 B6	23,60	23,62	28,82
 B7	23,96	23,97	24,01

- **Najwyższe wartości siły maksymalnej** uzyskano dla słupów B6 i B7, czyli słupów o niestandardowym kształcie półki jak i środka.
- **Najniższą wartość siły maksymalnej** uzyskano dla słupa B1, czyli dla słupa bazowego („*lipped channel*”) o najbardziej klasycznym kształcie przekroju poprzecznego.

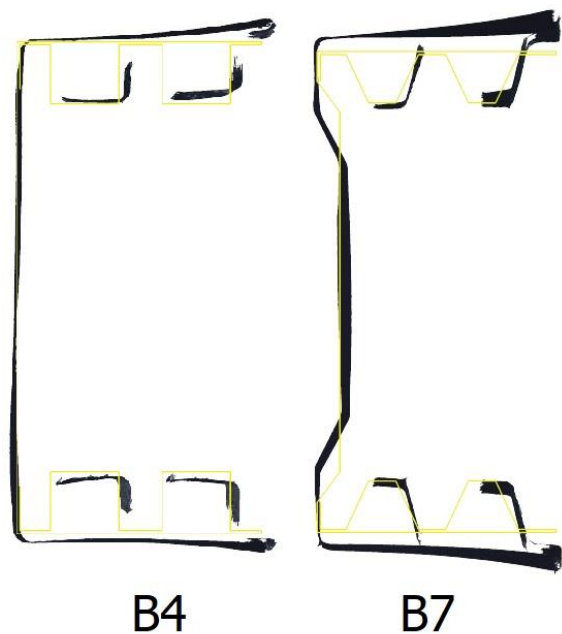
Wartości sił maksymalnych uzyskane na podstawie badań doświadczalnych: tensometrycznych i optycznych, co do wartości są do siebie bardzo zbliżone. Warto zwrócić uwagę na fakt, że badania te wykonywane były jednocześnie, a siła rejestrowana była z tego samego kanału pomiarowego. Istotną różnicę w wynikach uzyskano dla słupa B3, która w porównaniu z pozostałymi jest wysoka i wyniosła ok. 3,5 kN.

Różnice w uzyskanych wynikach badań przeprowadzonych metodą doświadczalną i metodą numeryczną, wynoszą poniżej 35%. Jednakże w rozdziale 6.1., w którym porównywano wartości sił krytycznych, różnice pomiędzy uzyskanymi wynikami są znacznie niższe. W związku z tym stwierdzono, że analiza liniowa i nieliniowa zostały przeprowadzone poprawnie, a uzyskane wyniki są wiarygodne. W tym miejscu warto zadać sobie pytanie, z czego wynikają tak znaczące błędy przy wyznaczaniu wartości siły maksymalnej?

- **Błędy wynikające z geometrii modelu** mogą powodować znaczące odchylenia wyników od tych oczekiwanych. W programie zamodelowano słupy o idealnej geometrii, a następnie zadano imperfekcje wstępną o wartości 10% grubości blachy, z której wykonano kształtowniki. Imperfekcje mogą w znaczący sposób wpływać na wytrzymałość ściskanych słupów. Ponadto są to niedokładności, które są trudne do przewidzenia i oszacowania, a przede wszystkim mogą być różne dla każdego z kształtowników.
- **Błędy wynikające z materiału**, który został zaimplementowany w programie. Przeprowadzona została statyczna próba rozciągania, która umożliwiła określenie właściwości materiałowych stali zastosowanej do wytworzenia słupów. W programie ANSYS wprowadzono dane uzyskane w doświadczeniu, które odpowiadały właściwością materiałowym całego modelu. Nie było możliwości uwzględnienia rzeczywistego umocnienia materiału w miejscach zagięć.
- **Zastosowane warunki brzegowe i obciążenie** odpowiadały idealnym, założonym wartościom oraz były takie same jak te, które zastosowane były w badaniach doświadczalnych. W przypadku badań doświadczalnych stanowisko przezbrajane było ręcznie, co mogło prowadzić do niewielkich błędów przesunięcia środka ciężkości przekroju poprzecznego względem przyłożonej osiowo siły ściskającej, przez co nie

uzyskano warunków czystego ściskania. Autorka dołożyła wszelkich starań, aby takie błędy się nie pojawiały, jednakże błędy przypadkowe są nie do uniknięcia.

W trakcie wykonywania analiz numerycznych możliwe było zadawanie różnej wartości imperfekcji wstępnej oraz przesuwania miejsca przyłożenia siły ściskającej, tak aby uzyskane wyniki były bardziej zbliżone do tych uzyskanych na podstawie metod doświadczalnych. Jednakże zdaniem autorki celowe dostosowywanie wyników analizy MES i modyfikowanie imperfekcji wstępnej oraz miejsca przyłożenia siły, tak aby uzyskać oczekiwane wyniki jest bezcelowe. Konieczne jest zagłębienie się w tematykę związaną z imperfekcjami, co aktualnie jest przedmiotem projektu OPUS 22. Analizy MES w przyszłości będą modyfikowane i aktualizowane zgodnie z wynikami badań i analiz prowadzonych w ramach projektu. Na rysunku 6.2. pokazano imperfekcje przekroju poprzecznego słupa B4 i B7. Żółtym kolorem zaznaczono idealny kształt przekroju poprzecznego słupa, uzyskany na podstawie modelu CAD. Natomiast czarnym kolorem zaznaczono rzeczywisty kształt słupa uzyskany na podstawie skanowania 3D.



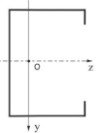
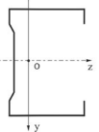
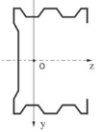
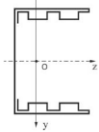
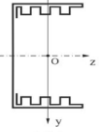
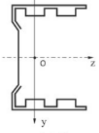
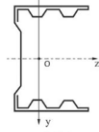
Rysunek 6.2. Imperfekcje geometryczne przekroi poprzecznych słupów B4 i B7

Więcej informacji dotyczących badania imperfekcji przedstawiono w rozdziale 7, dotyczącym kierunków dalszych badań.

6.4. Porównanie uzyskanych wyników badań

W celu przedstawienia wyników w postaci bezwymiarowej uzyskane wartości sił krytycznych i maksymalnych odniesiono do słupa bazowego B1, co przedstawione zostało w tabeli 6.3.

Tabela 6.3. Zestawienie bezwymiarowe dla sił krytycznych, maksymalnych w odniesieniu do wagi słupów

Słup	Siły krytyczne i siły maksymalne oraz masy w ujęciu bezwartościowym		
	Masa	Siła krytyczna (metoda tensometryczna)	Siła maksymalna (metoda tensometryczna)
 B1	100%	1,00	1,00
 B2	100,30%	3,7	1,48
 B3	118%	5,53	2,00
 B4	178%	2,70	2,44
 B5	183%	2,35	3,04
 B6	183%	8,77	3,50
 B7	175%	9,83	3,55

Słup B2 i B3 posiadają pojedyncze arkusze blachy na półce, w związku z tym ich masa jest niewiele większa niż masa słupa B1. Natomiast wzrost sił krytycznych oraz sił maksymalnych jest znaczący, co zostało opisane poniżej:

- Stosunek masy słupa B2, w porównaniu do słupa B1, wzrasta o 0,3%, a wartość siły krytycznej wzrasta ponad 3,5-krotnie. Natomiast w przypadku siły maksymalnej wzrost ten wynosi 48%.
- W przypadku słupa B3, masa wzrasta o 18%, natomiast siła krytyczna wzrasta ponad 5,5-krotnie, a siła maksymalna 2-krotnie.

Słupy, które posiadają podwójny arkusz blachy na półce, pod względem wzrostu masy, wydają się mniej korzystane. Jednakże biorąc pod uwagę znaczące wzrosty sił krytycznych oraz sił maksymalnych, stosowanie ich w projektowaniu konstrukcji cienkościennych jest warte rozważenia.

- Stosunek masy słupa B5, w porównaniu do słupa B1, wzrasta o 83%, a siła krytyczna wzrasta ponad 2-krotnie. Natomiast siła maksymalna wzrasta ponad 3-krotnie.
- W przypadku słupa B6, masa wzrasta również o 83%. Natomiast siła krytyczna wzrasta niemalże 9-krotnie. Siła maksymalna wzrasta 3,5-krotnie.

Słup B6 posiada dwa a nie trzy zagięcia na półce jak słup B5, dlatego w procesie produkcyjnym jest łatwiejszy do wykonania. Dodatkowo, zdaniem autorki, wzrost wartości siły krytycznej, rekompensuje wyższą masę kształtownika.

- Porównując słup B7 o masie niższej niż słup B6 uzyskujemy wyższe wartości sił krytycznych i maksymalnych. W przypadku słupa B7, porównując go do słupa B1, masa wzrasta o 75%, a siła krytyczna niemalże 10-krotnie.

Powyższe zestawienie dowodzi, że stosowanie kształtowników o niestandardowych przekrojach poprzecznych, porównując je z klasycznym ceownikiem posiadającym jedynie zagięcia brzegowe na półce, jest korzystne, ponieważ przy stosunkowo niewielkim wzroście masy siła krytyczna może wzrosnąć niemalże 10-krotnie, a siła maksymalna 3,5-krotnie.

7. Wnioski

Badania i analizy opisane w niniejszej pracy dotyczyły ściskania osiowego słupów o zmodyfikowanym kształcie przekroju poprzecznego. Na ich podstawie opracowano następujące wnioski:

- Wartości sił krytycznych i sił maksymalnych dla słupów o zmodyfikowanym kształcie przekroju poprzecznego są znacznie wyższe niż te uzyskane dla słupa o klasycznym przekroju poprzecznym B1 („*lipped channel*”).
- Słupy o zmodyfikowanym kształcie przekroju poprzecznego są mniej podatne na utratę stateczności w porównaniu do słupów standardowych.
- Słupy posiadające podwójny arkusz blachy i zagięcia/wzmocnienia na półce ulegały miejscowej utracie stateczności, a półfale pojawiają się tylko na środku. Ponadto słupy te charakteryzują się większą sztywnością w porównaniu do słupów z pojedynczym arkuszem blachy na półce. W przypadku projektowania konstrukcji cienkościennych, korzystne jest występowanie tylko jednej postaci utraty stateczności. Istotne jest, że w przypadku tych kształtowników nie występują interakcje pomiędzy postaciami wyboczenia, które znacząco utrudniają analizę i ich ocenę.
- Modyfikacja kształtu środka podwyższa wartości sił krytycznych i maksymalnych, co można zaobserwować na przykładzie przekroi B4 i B6. Słupy te posiadają skrzynkowe wzmocnienia na półce lecz słup B4 ma płaski środek, a słup B6 posiada zagięcia na środku. Siła krytyczna dla słupa B4 jest prawie 3-krotnie wyższa, w porównaniu do słupa B1, natomiast w przypadku słupa B6 wzrost wartości siły krytycznej jest niemalże 9-krotny.

W związku z powyższym stwierdza się, że modyfikacja kształtu przekroju poprzecznego podwyższa wartości sił krytycznych oraz sił maksymalnych, a zatem wytrzymałość, odporność na utratę stateczności oraz nośność graniczna jest większa niż ta uzyskiwana dla klasycznych ceowników obciążonych poprzez czyste ściskanie.

Wnioski płynące z zastosowanych metod doświadczalnych (tensometrycznej i optycznej), obliczeniowych oraz numerycznych (metoda elementów skończonych oraz metoda pasm skończonych):

- Metoda tensometryczna, jako najbardziej klasyczna metoda, daje stosunkowo wiarygodne wyniki, jednakże pomiar odkształceń dotyczy jedynie wybranych punktów konstrukcji, które, ograniczone są zastosowaną aparaturą pomiarową.

- Metoda optyczna pozwala na określenie postaci utraty stateczności ściskanych słupów, co jest niezwykle ważne przy analizie konstrukcji cienkościennych. Ponadto umożliwia wgląd w przemieszczenia konstrukcji, także po wykonaniu badań. Niestety ocena odkształceń stwarza wiele trudności ze względu na fakt, że rejestrowany jest obraz obejmujący cały słupek a zatem ocena odkształcenia w konkretnych punktach konstrukcji jest zatem niedokładna i niewiarygodna.
- Obliczenia analityczne przeprowadzone zostały zgodnie z wytycznymi pochodzącymi z normy europejskiej. Pozwalają one na określenie wartości sił krytycznych dla słupów posiadających pojedyncze zagięcia i modyfikacje kształtów przekroi poprzecznych. Im większa ilość modyfikacji tym mniejsza dokładność uzyskanych wyników. Rozwiązania analityczne obejmują analizę środka oraz analizę półki, jednakże oba te pasy są rozpatrywane osobno, a połączenie między nimi modelowane jest odpowiednimi warunkami brzegowymi. Metoda ta nie uwzględnia umocnienia powstałego na skutek obróbki plastycznej ani imperfekcji geometrycznych kształtowników.
- Metoda elementów skończonych pozwala na określenie wartości sił krytycznych oraz postaci wyboczenia słupów. Zamodelowanie obiektu w odpowiednim programie numerycznym nie następuje trudności. Jednakże analiza konstrukcji przy dużym odkształceniu plastycznym wymaga zastosowania komputera z dużą mocą obliczeniową.
- Metoda pasm skończonych pozwala na określenie wartości naprężeń krytycznych oraz postaci wyboczenia słupów. Metoda ta opiera się na normach amerykańskich, które podobnie jak norma europejska, uwzględniają jedynie niewielkie modyfikacje kształtów przekroi poprzecznych. Ponadto posiada ona ograniczenia związane z nadawaniem warunków brzegowych, ponieważ możliwe jest tylko zaimplementowanie obustronnego utwierdzenia słupów lub podparcia swobodnego.

Na podstawie przeprowadzonych badań stwierdzono, że zastosowanie tylko jednej metody badawczej w celu oceny odporności na utratę stateczności czy nośności granicznej ściskanych słupów jest niewystarczające. Konieczne jest zastosowanie kilku metod, ponieważ pozwala to na weryfikację uzyskanych wyników.

8. Kierunki dalszych badań

Na podstawie badań i analiz przedstawionych w niniejszej dysertacji określono kierunki dalszych badań, które przedstawiono poniżej:

- **Wpływ imperfekcji na zachowanie się kształtowników cienkościennych** – imperfekcje geometryczne mogą w istotny sposób wpływać na wartości sił krytycznych oraz sił maksymalnych. Może to wpływać na ich utratę stateczności oraz nośność graniczną. Autorka, wraz z zespołem badawczym aktualnie rozpoczyna prace związane z określeniem wpływu niedokładności kształtu na zachowanie się konstrukcji cienkościennych obciążonych zginaniem oraz ściskaniem.
- **Warunki brzegowe i zastosowane obciążenie** – w trakcie pracy nad niniejszą rozprawą doktorską stwierdzono, że w warunkach rzeczywistych, a w szczególności w trakcie wykonywania badań doświadczalnych, uzyskanie warunków czystego ściskania jest niezwykle trudne. W związku z powyższym rozważa się modyfikacje stanowiska badawczego, tak aby przezbrajanie nie powodowało ewentualnych odchyłek punktu przyłożenia siły ściskającej. Ponadto rozważa się zastosowanie obustronnego utwierdzenia jako sposobu podparcia.
- Zwrócono również uwagę na fakt, że obowiązujące normy międzynarodowe, w swoich procedurach obliczeniowych uwzględniają jedynie niewielkie zagięcia czy modyfikacje kształtów przekroi poprzecznych. W związku z tym planowane są próby modyfikacji tych formuł matematycznych, tak aby możliwa była analiza przekrojów o niestandardowych kształtach.
- Ponadto w najbliższej przyszłości planowane są badania doświadczalne skręcania profili o zmodyfikowanym kształcie przekroju poprzecznego.

Bibliografia

- [1] Biegus i A., Nośność graniczna stalowych konstrukcji prętowych, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1997.
- [2] J. Kasprzak i P. Paczos, „The influence of imperfections on the Strength and Stability of Cold-Formed Sigma Channels with Corrugated Flanges,” *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, pp. 36 - 49, 2019.
- [3] A. Sabbagh, R. Mirghaderi, M. Petkovski i K. Pilakoutas, „An integrated thin-walled steel skeleton structure (two full scale tests),” *Journal of Constructional Steel Research*, nr 66, pp. 470 - 479, 2010.
- [4] M. Obst, D. Kurpisz i P. Paczos, „The experimental and analytical investigation of torsion phenomenon of thin-walled cold formed channel beams subjected to four-point bending,” *Thin-Walled Structures*, nr 106, pp. 179 - 186, 2016.
- [5] L. Huynh, C. Pham i K. Rasmussen, „Mechanical properties and residual stresses in cold-rolled aluminium channel sections,” *Engineering Structures*, nr 199, p. 109562, 2019.
- [6] P. Paczos, „Experimental investigation of C-beams with non-standard flanges,” *Journal of Constructional Steel Research*, nr 93, pp. 77-87, 2014.
- [7] X.-h. Huang, J. Yang, Q.-f. Liu, J. Zhu, L. Bai, F.-l. Wang i J.-h. Wang, „A simplified flange–lip model for distortional buckling of cold-formed steel channel-sections with stiffened web,” *International Journal of Mechanical Sciences*, nr 136, pp. 451 - 459, 2018.
- [8] E. Magnucka-Blandzi i K. Magnucki, „Buckling and optimal design of cold-formed thin-walled beams: Review of selected problems,” *Thin-Walled Structures*, nr 49(5), pp. 554 - 561, 2011.
- [9] E. Magnucka-Blandzi i K. Zając, „Stability of thin-walled channel beams with orthotropic flanges,” *Mechanics and Mechanical Engineering*, nr 17(2), pp. 141 - 155, 2013.
- [10] Y. SudhirSastry, Y. Krishna i P. Budarapu, „Parametric studies on buckling of thin walled channel beams,” *Computational Materials Science*, nr 96(B), pp. 416 - 424, 2015.
- [11] D. Yerudkar i G. Vesmawala, „Finite Element Simulation of Cold Formed Steel Stiffened Zed Sections for Local, Distortional And Lateral Torsional Buckling,” *American Journal Engineering Research*, nr 6(1), p. 249 – 255, 2017.
- [12] P. Dinis, D. Camotim, A. Landesmann i A. Martins, „On the direct strength method design of columns against global failures,” *Thin-Walled Structures*, nr 139, pp. 242 - 270, 2019.
- [13] M. Grenda i P. Paczos, „Experimental and numerical study of local stability of non-standard thin-walled channel beams,” *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, nr 57(3), pp. 549 - 562, 2019.

- [14] Z. Kołakowski i J. Jankowski, „Interactive Buckling of Steel LC-Beams Under Bending,” *Materials*, nr 12(9), p. 1440, 2019.
- [15] M. Anbarasu i S. Sukumar, „Local/Distortional/Global buckling mode interaction on thin walled lipped channel columns,” *Latin American Journal of Solids and Structures*, nr 11(8), pp. 1363 - 1375, 2014.
- [16] Z. Kołakowski i M. Urbaniak, „Influence of the distortional-lateral buckling mode on the interactive buckling of short channels,” *Thin-Walled Structures*, nr 109, pp. 296 - 303, 2016.
- [17] B. Schafer, „Designing cold-formed steel using the direct strength method,” w *18th International Speciality Conference of Cold-Formed Steel Structures*, Orlando, 2006.
- [18] Y. Kwon, „The development of the direct strength method for welded steel members with buckling interaction,” *Thin-Walled Structure*, nr 81, pp. 121-131, 2014.
- [19] J. Papangelis, N. Trahair i G. Hancock, „Direct strength method for shear capacity of beams with corrugated webs,” *Journal of Constructional Steel Research*, nr 137, pp. 152-160, 2017.
- [20] N. Hadjipantelis, L. Gardner i M. Wadee, „Prestressed cold-formed steel beams: Concept and mechanical behavior,” *Engineering Structures*, nr 172, pp. 1057-1072, 2018.
- [21] Q.-Y. Li i B. Young, „Experimental and numerical investigation on cold-formed steel built-up section pin-ended columns,” *Thin-Walled Structures*, nr 170, 2022.
- [22] S. Chen, H. Fang, J.-z. Liu i T.-M. Chan, „Design for local buckling behaviour of welded high strength steel I-sections under bending,” *Thin-Walled Structures*, nr 172, 2022.
- [23] Rinchen, K. Rasmussen i H. Zhang, „Design of cold-formed steel single C-section portal frames,” *Journal of Constructional Steel Research*, nr 162, 2019.
- [24] N. Saliba i L. Gardner, „Deformation based design of stainless steel cross-section in shear,” *Thin-Walled Structures*, nr 123, pp. 324-332, 2018.
- [25] L. Gardner, „The Continuous Strength Method, Proceedings of the Institute of Civil Engineering,” *Structure and Buildings*, nr 161(3), pp. 127-133, 2008.
- [26] S. Ahmed, M. Ashraf i M. Anwar-Us-Saadat, „The Continuous Strength Method for slender stainless steel cross-section,” *Thin-Walled Structures*, nr 107, pp. 362-376, 2016.
- [27] O. Zhao, S. Afshan i L. Gardner, „Structural response and continuous strength method design of slender stainless steel cross-sections,” *Engineering Structures*, nr 140, pp. 14-25, 2017.
- [28] H. Luo, Y. Guo i S. Ma, „Distortional buckling of thin-walled inclined lipped channel beams bending about minor axis,” *Journal of Constructional Research Steel*, nr 67, pp. 1884-1889, 2011.
- [29] R. B. D. C. R. Goudaves, „GBTUL 2.0 – A second-generation code for the GBT-based buckling and vibration analysis of thin-walled members,” *Thin-Walled Structure*, nr 124,

pp. 235-257, 2018.

- [30] A. Habtemariam, M. Bianco, C. Könke i V. Zabel, „Geometrically nonlinear formulation of Generalized Beam Theory for the analysis of thin-walled circular pipes,” *Thin-Walled Structures*, nr 173, 2022.
- [31] A.K.Habtemariam, C. Könke, V. Zabel i M. Bianco, „Generalized Beam Theory formulation for thin-walled pipes with circular axis,” *Thin-Walled Structures*, nr 159, 2021.
- [32] J. Latalski i D. Zulli, „Generalized Beam Theory for Thin-Walled Beams with Curvilinear Open Cross-Sections,” *Applied Sciences*, nr 10(21), 2020.
- [33] R. Gonçalves i D. Camotim, „Generalised beam theory-based finite elements for elastoplastic thin-walled metal members,” *Thin-Walled Structures*, nr 49(10), pp. 1237-1245, 2011.
- [34] R. Gonçalves i D. Camotim, „Geometrically non-linear generalised beam theory for elastoplastic thin-walled metal members,” *Thin-Walled Structures*, nr 51, pp. 121-129, 2012.
- [35] P. Gatheeshgar, K. Poologanathan, S. Gunalan, B. Nagaratnam, K. Tsavdaridis i J. Ye, „Structural behaviour of optimized cold-formed steel beams,” *Steel Construction: Design and Research*, nr 13(4), pp. 294-304, 2020.
- [36] D. Phan, S. Mojtabaei, I. Hajirasouliha, T. Lau i J. Lim, „Design and optimization of cold-formed steel sections in bolted moment connections considering bimoment,” *Journal of Structural Engineering*, nr 146(8), 2020.
- [37] M. Ghannam, „Bending Moment Capacity of Cold-Formed Steel Built-Up Beams,” *Bending Moment Capacity of Cold-Formed Steel Built-Up Beams*, nr 19, p. 660–671, 2019.
- [38] K. Roy, T. Ting, H. Lau i J. Lim, „Experimental and numerical investigations on the axial capacity of cold-formed steel built-up box sections,” *Journal of Constructional Steel Research*, nr 160, pp. 411-427, 2019.
- [39] R. Dobson, K. Poologanathan, S. Gunalan, P. Gatheeshgar, J. Ye i L. Ma, „Optimum design of cold-formed steel beams subject to bending, shear and web crippling,” *9th International Conference on Steel and Aluminium Structures*, 2019.
- [40] M. Wu, X. Huang i J. Zhu, „Distortional buckling of CFS channel section with and without stiffened flanges,” *Journal of Mechanical Science and Technology*, nr 33(6), p. 2623 – 2632, 2019.
- [41] C. Szymczak i M. Kujawa, „Flexural buckling and post-buckling of columns made of aluminium alloys,” *European Journal of Mechanics/A Solids*, nr 73, p. 420 – 429, 2019.
- [42] K. Magnucki, „Bending of symmetrically sandwich beams and I-beams – Analytical study,” *International Journal of Mechanical Science*, nr 150, p. 411 – 419, 2019.
- [43] P. Binh, D. Minh, G. Sergeevich i N. Duc, „Boundary of stability region of a thin-walled beam under complex loading conditions,” *2017*, nr 122, p. 355 – 361.

- [44] C. Szymczak i M. Kujawa, „Distortional buckling of thin-walled columns of closed quadratic cross-section,” *Thin-Walled Structures*, nr 113, p. 111 – 121, 2017.
- [45] Y. Lu, W. Li, T. Zhou i H. Wu, „Novel local buckling formulae for cold-formed C-sections columns considering end conditions effect,” *Thin-Walled Structures*, nr 116, p. 265 – 276, 2017.
- [46] J. Pesic, D. Lanc i G. Turkalj, „Non-linear global stability of thin-walled laminated beam-type structure,” *Computer and Structures*, nr 173, p. 19 – 30, 2016.
- [47] A. Biegus, „Projektowanie konstrukcji stalowych zgodnie z PN-EN 1993,” *Materiały budowlane*, nr 490, pp. 38-42, 2013.
- [48] J. Kesti i M. Davies, „Local and distortional buckling of thin-walled short columns,” *Thin-Walled Structures*, nr 34, p. 115 – 134, 2019.
- [49] R. Szczerba, „Nośność i stateczność stalowych belek o przekroju ceowym,” *Budownictwo i Architektura*, nr 12(2), p. 283 – 290, 2013.
- [50] L. Gao, F. Shao, L. Bai, X. Xie i X. He, „Experimental research on local buckling of BS700 high-strength steel thin-walled box-section members under axial compression,” *Journal of Mechanical Science and Technology*, nr 36, p. 2299–2307, 2022.
- [51] X. Cao, Y. Chen, C. Cheng, J. Fan, S. Shen, Z. Tao, R. Zhong, X. Zhou, S. Kim i Z. Kong, „Interaction analysis of buckling behavior of 800 MPa high strength steel welded T-section column,” *Thin-Walled Structures*, nr 179, 2022.
- [52] E. Maia, C. Couto, P. Real i N. Lopes, „The General Method for the fire design of I-section web-tapered beam–columns,” *Thin-Walled Structures*, nr 174, 2022.
- [53] T. Tankova, L. d. Silva i F. Rodrigues, „Buckling curve selection for HSS welded I-section members,” *Thin-Walled Structures*, nr 177, 2022.
- [54] M. Feng, Y. Wang i J. Davies, „Structural behaviour of cold-formed thin-walled short steel channel columns at elevated temperatures. Part 2: Design calculations and numerical analysis,” *Thin-Walled Structures*, nr 41(6), pp. 571-594, 2003.
- [55] D. Ungermann, S. Lübke i B. Brune, „Tests and design approach for plain channels in local and coupled local-flexural buckling based on eurocode 3,” *Thin-Walled Structures*, nr 81, pp. 108-120, 2014.
- [56] J. Ye, I. Hajirasouliha i J. Becque, „Experimental investigation of local-flexural interactive buckling of cold-formed steel channel columns,” *Thin-Walled Structures*, nr 125, pp. 245-258, 2018.
- [57] L. Yang, G. Shi, M. Zhao i W. Zhou, „Research on interactive buckling behavior of welded steel box-section columns,” *Thin-Walled Structures*, nr 115, pp. 34-47, 2017.
- [58] J. Chen i T.-M. Chan, „Compressive behaviour and design of compact to slender octagonal

- concrete-filled steel tubular stub columns,” *Thin-Walled Structures*, nr 167, 2021.
- [59] X. Cao, R. Zhong, Y. Xu, C. Cheng, S. Liu, Z. Chen, S.-E. Kim i Z. Kong, „Local–overall interactive buckling behaviour of 800 MPa high-strength steel welded H-section members under axial compression,” *Thin-Walled Structures*, nr 164, 2021.
- [60] M. Alrubaidi, H. Elsanadedy, H. Abbas, T. Almusallam i Y. Al-Salloum, „Investigation of different steel intermediate moment frame connections under column-loss scenario,” *Thin-Walled Structures*, nr 154, 2020.
- [61] Y. Sun, Y. Liang, A. Su i O. Zhao, „Local–flexural interactive buckling of S690 high strength steel slender welded I-section columns: Testing, modelling and design,” *Thin-Walled Structures*, nr 166, 2021.
- [62] L. Gao, K. Jiang, L. Bai i Q. Wang, „Experimental study on stability of highstrength steel long columns with box-sections,” *Advanced Steel Construction*, nr 13(4), pp. 399-411, 2017.
- [63] G. Hancock, D. Cook, R. Moisy i A. Yen, „Direct strength design of hot-rolled and cold-formed steel compression members,” *Proceedings of the Fourth International Conference on Advances in Steel Structures*, nr I, pp. 13-20, 2005.
- [64] A. Rossi, F. Ferreira, C. Martins i E. Júnior, „Assessment of lateral distortional buckling resistance in welded I-beams,” *Journal of Constructional Steel Research*, nr 166, 2020.
- [65] *PN-EN 1993-1-3, Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-3: Reguły ogólne. Reguły uzupełniające dla konstrukcji z kształtowników i blach profilowanych na zimno.*
- [66] M. Ostwald i K. Magnucki, *Optymalne projektowanie belek cienkościennych walcowanych na zimno o przekrojach otwartych*, Poznań: Agencja Reklamowa COMPRINT, 2008.
- [67] M. Paszkiewicz i T. Kubiak, „Selected problems concerning determination of the buckling load of channel section beams and columns,” *Thin-Walled Structures*, nr 93, pp. 112 - 121, 2019.
- [68] V. Nguyen, C. Wang, D. Mynors, M. English i M. Castellucci, „Compression tests of cold-formed plain and dimpled steel columns,” *Journal of Constructional Steel Research*, nr 69, pp. 20 - 29, 2012.
- [69] D. Fratamico, S. Torabian, K. Rasmussen i B. Schafer, „Experimental study on the composite action in sheathed and bare built-up cold-formed steel columns,” *Thin-Walled Structures*, nr 127, pp. 290 - 305, 2018.
- [70] A. Ziółkowski i S. Imiełowski, „Buckling and post-buckling behavior of prismatic aluminum columns submitted a series of compressive loads,” *Experimental Mechanics*, nr 51, pp. 1335 - 1345, 2011.
- [71] P. Paczos i P. Wasilewicz, „Badania doświadczalne belek cienkościennych kształtowanych na zimno,” *Modelowanie Inżynierskie*, nr 33, pp. 113 - 118, 2007.

- [72] X. Cheng, Y. Chen i L. Pan, „Experimental study on steel beam-columns composed of slender H-section under cyclic bending,” *Journal of Constructional Steel Research*, nr 88, pp. 279 - 288, 2013.
- [73] H. Craveiro, J. Rodrigues i L. Laím, „Buckling resistance of axially loaded cold-formed steel columns,” *Thin-Walled Structures*, nr 106, pp. 358-375, 2016.
- [74] Q. Ren, K. Zhan, C. Han, Z. Tao i L. Hau, „Dune sand concrete-filled steel tubular (CFST) stub columns under axial compression: Experiments,” *Thin-Walled Structures*, nr 124, pp. 291 - 302, 2018.
- [75] M. Adil Dar, N. Subamian, M. Anbarasu, A. Dar i J. Lim, „Structural performance of cold-formed steel composite beams,” *Steel and Composite Structure*, nr 27(5), pp. 545 - 554, 2018.
- [76] M. Adil Dar, D. Sahoo, S. Pulikkal i A. Jain, „Behavior of laced built-up cold-formed steel columns: Experimental investigation and numerical validation,” *Thin-Walled Structures*, nr 132, pp. 398-409.
- [77] X. Chen, J. Xia, B. Xu i R. Ma, „Mechanical performance of built-up columns composed of four cold-formed square steel tubes,” *Applied Science*, nr 9, pp. 1 - 16, 2019.
- [78] F. Zhou i B. Young, „Experimental investigation of concrete-filled single-skin and double-skin steel oval hollow section stub columns,” *Thin-Walled Structures*, nr 140, pp. 157 - 167, 2019.
- [79] M. Macdonald, H. M.A., M. Kotełko i J. Rhodes, „Web crippling behavior of thin-walled lipped channel beams,” *Thin-Walled Structures*, nr 49, pp. 682 - 690, 2011.
- [80] D. Banat, Z. Kołakowski i R. Mania, „Investigation of fml profile buckling and post-buckling behavior under axial compression,” *Thin-Walled Structures*, nr 107, pp. 335 - 344, 2016.
- [81] Y. Chang, M. Liu, P. Wang i X. Li, „Behaviors and design method for distortional buckling of thin-walled irregular-shaped aluminum alloy struts under axial compression,” *Engineering Structures*, nr 153, pp. 118 - 135, 2017.
- [82] S. Jiang, Z. Xiong, X. Guo i Z. He, „Buckling behavior of aluminum alloy columns under fire conditions,” *Thin-Walled Structures*, nr 124, pp. 523 - 537, 2018.
- [83] X. Zhou i M. Chan, „Experimental investigation and finite element analysis of web-stiffened cold-formed lipped channel columns with batten sheets,” *Thin-Walled Structures*, nr 125, pp. 38 - 50, 2018.
- [84] X. Yao i Y. Guo, „Inelastic test and direct method of cold-formed steel lipped channel members in bending,” *The Civil Engineering Journal*, nr 10, pp. 625 - 640, 2016.
- [85] E. Magnucka-Blandzi, P. Paczos i P. Wasilewicz, „Buckling study of thin-walled channel beams with double-box flanges in pure bending,” *Strain*, nr 48, pp. 317 - 325, 2012.
- [86] K. Balasubramanin, A. Siva, G. Ananthi i S. R., „Experimental investigation of unsymmetrically I-section,” *International Journal of Advanced Information Science and*

Technology, nr 32(32), pp. 46 - 49, 2014.

- [87] P. Manikandan, S. Sukumar i T. Balaji, „Effective shaping of cold-formed thin-walled built-up beams in pure bending,” *Arabian Journal for Science and Engineering*, nr 39, pp. 6043 - 6054, 2014.
- [88] L. Wang i B. Young, „Beams tests of cold-formed steel built-up sections with web perforations,” *Journal of Constructional Steel Research*, nr 115, pp. 18 - 33, 2015.
- [89] J. Vacha, P. Kyzlik, J. Both i F. Wald, „Beams with corrugated web at elevated temperature, experimental results,” *Thin-Walled Structures*, nr 98, pp. 19 - 28, 2016.
- [90] B. Young, P. Dinis i D. Camotim, „CFS lipped channel columns affected by L-D-G interaction. Part I: Experimental investigation,” *Computers & Structures*, nr 207, pp. 219 - 232, 2018.
- [91] J. Ye, H. J. i J. Becque, „Experimental investigation of local-flexural buckling of cold-formed steel channel columns,” *Thin-Walled Structures*, nr 125, pp. 245 - 258, 2018.
- [92] M. D’Antimo, M. Latour, G. Rizzano i J. Démonceau, „Experimental and numerical assessment of steel beams under impact loadings,” *Journal of Constructional Steel Research*, nr 158, pp. 230 - 247, 2019.
- [93] M. Urbaniak, A. Teter i T. Kubiak, „Influence of boundary conditions on the critical and failure load in the GFPR channel cross-section columns subjected to compression,” *Solid State Phenomenon*, nr 240, pp. 212 - 217, 2015.
- [94] P. Czapski i T. Kubiak, „Numerical and experimental investigation of the post-buckling behavior of square cross-section composite tubes,” *Composite Structures*, nr 132, pp. 1160 - 1167, 2015.
- [95] M. Styles, P. Compston i S. Kalyanasundaram, „The effect of core thickness on the flexural behavior of aluminum foam sandwich structure,” *Composite Structures*, nr 80, pp. 532 - 538, 2007.
- [96] A. Perret, S. Mistou, M. Fazzini i R. Brault, „Global behavior of a composite stiffened panel in buckling. Part 2: Experimental investigation,” *Composite Structures*, nr 94, pp. 376 - 385, 2012.
- [97] S. Banerjee, T. Dasgupta, S. Mukherjee, M. Shome, P. Chakraborti i S. Saha, „Digital image correlation for grain scale strain measurement in interstitial free high strength steel,” *Materials Science and Technology*, nr 32(4), pp. 328 - 337, 2016.
- [98] V. Srivastava i J. Baqersad, „A multi-view optical technique to extract the operating deflection shape of full vehicle using digital image correlation,” *Thin-Walled Structures*, nr 145, p. 106426, 2019.
- [99] K. R. S. Jeleniewicz, K. Karsznia, Ł. Uchański i W. Gilewski, „Badania eksperymentalne krótkich cienkościennych profili stalowych z użyciem technik geodezyjnych,” *Acta*

- Scientarium Polonorum Architectura*, nr 15(4), pp. 17 - 30, 2016.
- [100] C. Zhao, J. Niu, Q. Zhang, C. Zhao i J. Xie, „Buckling behaviour of a thin-walled cylinder shell with the cutout imperfections,” *Mechanics and Advanced Materials and Structures*, nr 26(18), pp. 1536 - 1542, 2019.
- [101] M. Bambach, „Photogrammetry measurement of buckling modes and interactions in channel with edge-stiffeners flanges,” *Thin-Walled Structures*, nr 47, pp. 485 - 504, 2009.
- [102] J. Dobrić, A. Filipović, Z. Marković i N. Baddoo, „Structural response to axial testing of cold-formed stainless steel angle columns,” *Thin-Walled Structures*, nr 156, p. 106986, 2020.
- [103] J. Stoer i R. Bulirsch, *Wstęp do analizy numerycznej*, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1987.
- [104] M. Turner, R. Clough, H. Martin i L. Topp, „Stiffness and deflection analysis of complex structures,” *Journal of the Aeronautical Sciences*, nr 23(9), pp. 805 - 824, 1956.
- [105] S. Vijayanand i M. Anbarasu, „Effect of Spacers on Ultimate Strength and Behavior of Cold-Formed Steel Built-up Columns,” *Procedia Engineering*, nr 173, pp. 1423 - 1430, 2017.
- [106] J. Bonada, M. Pastor, F. Roure i M. Casafont, „Influence of the cold work effects in perforated rack columns under pure compression load,” *Engineering Structures*, nr 97, pp. 130-139, 2015.
- [107] P. Czapski i T. Kubiak, „Influence of residual stresses on the buckling behaviour of thin-walled, composite tubes with closed cross-section – Numerical and experimental investigations,” *Composite Structures*, nr 229, p. 111407, 2019.
- [108] D. Banat i R. Mania, „Zastosowanie MES do weryfikacji badań zniszczenia cienkościennych profili wykonanych z materiału typu FML,” *Modelowanie Inżynierskie*, nr 28(59), pp. 12 - 18, 2016.
- [109] H. Dębski i J. Jonak, „Failure analysis of thin-walled composite channel section columns,” *Composite Structures*, nr 132, pp. 567 - 574, 2015.
- [110] F.-x. Ding, L. Luo, J. Zhu, L. Wang i Z.-w. Yu, „Mechanical behavior of stirrup-confined rectangular CFT stub columns under axial compression,” *Thin-Walled Structures*, nr 124, pp. 136-150, 2018.
- [111] Q. Estrada, D. Szwedowicz, A. Rodriguez-Mendez, O. Gómez-Vargas, M. Elias-Espinosa i J. Silva-Aceves, „Energy absorption performance of concentric and multi-cell profiles involving damage evolution criteria,” *Thin-Walled Structures*, nr 124, pp. 218-234, 2018.
- [112] F. Rodrigues, P. da S. Vellasco, L. de Lima, S. de Andrade i J. da Silva, „Finite Element Modelling of Steel Beams with Web Openings,” 2014.
- [113] P. Różyło, A. Teter, H. Dębski, P. Wysmulski i K. Falkowicz, „Experimental and numerical study of the buckling of composite profiles with open cross-section under axial compression,”

Applied Composite Materials, nr 24, p. 1251 – 1264, 2017.

- [114] H. Dębski, P. Różyło, A. Gliszczyński i T. Kubiak, „Numerical models for buckling, postbuckling and failure analysis of pre-damaged thin-walled composite struts subjected to uniform compression,” *Thin-Walled Structures*, nr 139, pp. 53 - 65, 2019.
- [115] H. Dębski, „Numerical and experimental analysis of stability of thin-walled composite structures subjected to eccentric load,” *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, nr 19, p. 792 – 802, 2019.
- [116] J. Ye, S. Mojtabaei i I. Hajirasouliha, „Local-flexural interactive buckling of standard and optimised cold-formed steel columns,” *Journal of Constructional Steel Research*, nr 144, pp. 106 - 118, 2018.
- [117] C. Ren, B. Wang i X. Zhao, „Numerical predictions of distortional-global buckling interaction of perforated rack uprights in compression,” *Thin-Walled Structures*, nr 136, pp. 292-301, 2019.
- [118] Y. Luo i H. Fan, „Energy absorbing ability of rectangular self-similar multi-cell sandwich-walled tubular structures,” *Thin-Walled Structures*, nr 124, pp. 88 - 97, 2018.
- [119] W. Naohiro, I. Kikuo, O. Tadayoshi i K. Yosuke, „Local buckling behavior of octagonal hollow cross-section member under axial compression or bending shear,” *Proceedings of Eurosteel 2017*, nr 1(2-3), pp. 1116 - 1122, 2017.
- [120] R. Ganeshkumar, S. Suresh Babu i A. Leema Rose, „Analytical study on cold-formed steel back to back supacee section,” *International Journal for Research in Applied Science & Engineering Technology*, nr 6(6), p. 458 – 462, 2018.
- [121] G. Turvey i I. Marshall, *Buckling and Postbuckling of Composite Plates*, Springer Dordrecht, 1995.
- [122] S. Jin, Z. Li, Q. Tang, Z. He i H. Hunag, „A combined force/displacement-based constrained finite strip method for modal stability analysis of thin-walled members,” *Thin-Walled Structures*, nr 159, p. 107322, 2021.
- [123] P. Paczos, „Experimental and numerical (FSM) investigations of thin-walled beams with double-box flanges,” *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, nr 51(2), pp. 497 - 504, 2013.
- [124] X.-h. Huang, L. Bai, J. Yang, F.-l. Wang, J. Zhu i Q.-f. Liu, „Distortional-buckling analysis of channel sections with web stiffened by longitudinal ribs subjected to axial compression or bending,” *Thin-Walled Structures*, nr 144, p. 106322, 2019.
- [125] S. Jin, Z. Li, F. Huang, D. Gan, R. Cheng i G. Deng, „Constrained shell finite element method for elastic buckling analysis of thin-walled members,” *Thin-Walled Structures*, nr 145, p. 106409, 2019.
- [126] S. Ádány, N. Silvestre, B. Schafer i D. Camotim, „GBT and cFSM: Two modal approaches

- to the buckling analysis of unbranched thin-walled member,” *Advanced Steel Construction*, nr 5(2), pp. 195 - 223, 2009.
- [127] C. Szymczak i M. Kujawa, „Buckling and initial post-local buckling behaviour of cold-formed channel member flange,” *Thin-Walled Structures*, nr 137, pp. 177 - 184, 2019.
- [128] J. de Lazzari i E. de Miranda Batista, „Finite strip method computer application for buckling analysis of thin-walled structures with arbitrary cross-sections,” *International Engineering Journal*, nr 71(3), 2021.
- [129] P. Deniziak, „O wymiarowaniu kształtowników giętych na zimno według eurokodów i norm amerykańskich,” *Inżynieria i Budownictwo*, nr 1-2, pp. 94-96, 2020.